

۱۴۰۴/۰۸/۰۸

«بناخضانه»

برای حل محنتی

۱) جمله اول یک دنباله حسابی ۴ و جمله چهارم این دنباله ۲۰۸ است. جمله پنجم این دنباله حسابی ۲۰۸ است؟

$$\begin{aligned} 3d = 91 - 4 = 21 &\rightarrow d = 7 & 208 = 4 + (n-1)7 = 7n + 33 &\rightarrow 7n = 175 \rightarrow \\ n = \frac{25}{1} & \text{ جمله ۲۵م} \end{aligned}$$

۲) چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در تقسیم بر ۷ باقی مانده ۳ دارند؟

$$\begin{aligned} 100 \leq 7n + 3 < 1000 &\rightarrow 7n \geq 97 \rightarrow n \geq 14 \dots \rightarrow 1421 \\ &\rightarrow 7n < 997 \rightarrow n < 142 \dots \rightarrow 1420 \end{aligned}$$

تعداد = $142 - 14 + 1 = 129$

۳) اگر دنباله حسابی با جمله عمومی a_n داریم $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = -9n + 12$ حاصل $a_{17} + a_1$ را بیابید.

$$\begin{aligned} 3a_1 + (3n+3)d = -9n + 12 &\rightarrow 3nd = -9n \rightarrow d = -3 \\ 3a_1 - 9 = 12 &\rightarrow a_1 = 9 \\ a_{17} + a_1 = 2a_1 + 3d = 18 - 9 = 9 \end{aligned}$$

۴) سه عدد $2^x - 1$, 2^{x+1} , $2^{2x} - 3$ به ترتیب جملات سوم، هشتم و نوزدهم یک دنباله حسابی هستند. مجموع این ۳ جمله را بیابید.

$$\begin{aligned} 2^x = t &/ 2^{2x} = t^2 / 2^{x+1} = 2t \\ (t^2 - 3) + (t - 1) = 4t &\rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \rightarrow (t-4)(t+1) = 0 \rightarrow t = 4 \\ t^2 - 3 + t - 1 + 2t &= 16 - 3 + 4 - 1 + 8 = 24 \end{aligned}$$

۵) اگر جمله دوم یک دنباله حسابی را از جمله دوازدهم کم کنیم، حاصل ۵، اگر جمله دوم را از جمله دوازدهم جمع کنیم، حاصل ۲۵ است. جمله ۲۱ ام را بیابید.

$$\begin{aligned} a_{12} - a_2 = 5 &\rightarrow 2d = 5 \rightarrow d = 2.5 \\ a_1 + a_{12} = 2t_1 + 9d + 11d = 2t_1 + 20 \times \frac{5}{2} = 2t_1 + 50 = 25 &\rightarrow t_1 = \frac{-25}{2} \\ a_{21} = \frac{-25}{2} + 20 \times \frac{5}{2} = \frac{100 - 25}{2} = \frac{75}{2} = 37.5 \end{aligned}$$

۶) یک دنباله حسابی مجموع ۵ جمله اول ۱/۳ مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

$$(\omega a_1 + (1 + 2 + 3 + 4)d) = \frac{1}{3} (\omega a_1 + 1 \cdot d + \omega \times \omega d) \rightarrow$$

$$\frac{2}{3} (\omega a_1) + (1 - \frac{2\omega}{3})d = 0 \rightarrow \frac{1}{3} a_1 = \frac{\omega}{3} d \rightarrow a_1 = \frac{1}{\omega} d \rightarrow$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{\omega d + d}{\omega d} = \frac{1 + \omega}{\omega} = \boxed{3}$$

۷. یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n عبارت $t_n = t_{n+3} + 15$ برقرار است. عبارت $t_9 - t_5$ چند برابر t_7 باشد؟
 $3d = 15 \rightarrow d = 5$

$$\begin{cases} K \times d = 20 \\ (t_9 - t_5)(t_9 + t_5) = 20(2t_1 + 14d) = \frac{K}{4} t_1 + 1200 \\ t_7 = t_1 + 6d = t_1 + 4 \times 5 = t_1 + 20 \end{cases} \quad \frac{t_9 - t_5}{t_7} = \boxed{4}$$

۸. بین دو عدد ۲ و $2(1 - 4\sqrt{3})$ و $2 + \sqrt{3}$ دانه دانه حسابی درج کرده ایم، قدر نسبت دنباله حسابی را بیابید.
 (شروع جملات دنباله از ۲ است.)

$$d = \frac{2 + \sqrt{3} - 2 + 12\sqrt{3}}{12 - 2} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \boxed{\sqrt{3}} \leftarrow \text{قدر نسبت}$$

۹. بین دو عدد ۲ و ۳۲ تعداد ۳- K دانه دانه حسابی درج کرده ایم، آن دانه دانه را هم برابر ۱۱ باشد، قدر n را بیابید.
 (شروع جملات از ۲ است.)

$$2 + nd = 32 \rightarrow nd = 30 \quad d = \frac{32 - 2}{K - 1} = \frac{30}{K - 1} \quad \text{①, ②} \rightarrow \frac{15n}{K - 1} = 9$$

$$15n = 9(K - 1) \rightarrow 5n = 3(K - 1) \rightarrow \boxed{n = 3}$$

۱۰. مجموع جملات n ام، $(n + 4)$ ام یک دنباله حسابی با مجموع جملات n ام و $n + 4$ ام ده دانه دنباله برابر است. آن ده دانه را هم برابر $\frac{n}{4}$ باشد، چندمین جمله این دنباله صفر است؟

$$t_n + t_{n+4} = t_3 + t_{17} \rightarrow n + n + 4 = 3 + 17 \rightarrow 2n = 16 \rightarrow n = 8$$

$$t_8 = 3t_4 \rightarrow t_1 + 7d = 3t_1 + 9d \rightarrow 2t_1 + 2d = 0 \rightarrow t_1 + d = \boxed{0 = t_2} \quad \text{②}$$