عسل رمضانی — دهم دختر A — تکلیف ۲۱

۱

$(۲! + ۴! + ۶! + \cdots + ۲۶!)(۱! + ۳! + ۵! + ۷! + \cdots + ۲۵!) \to ۶\times۷ = ۴۲$ یکان ۲

$۲ + ۲۴ = ۲۶$ یکان ۶

$۱ + ۶ = ۷$

۲

الف) $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}\times(۱+\sqrt{۷})^۲} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}\times ۲(۴+\sqrt{۷})} = \sqrt[۴]{۲}$

ب) $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۱۰}}\times\frac{۲-\sqrt{۱۰}}{۲-\sqrt{۱۰}} = \frac{-۳\sqrt{۲}}{۴-۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ / $\sqrt{۳+\sqrt{۵}}-\sqrt{۳-\sqrt{۵}} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}-\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\right)^۲}$

$= \pm\sqrt{۳+\sqrt{۵}+۳-\sqrt{۵}-۲\sqrt{۹-۵}} = \pm\sqrt{۲}$

$\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۱۰}}\right)\left(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}-\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\pm\sqrt{۲} = \pm۱$

۳

الف) $\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}\times\frac{۵+\sqrt{۶}}{۵+\sqrt{۶}} = \frac{۱۰\sqrt{۲}+۱۵\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶} = \frac{۱۹(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۱۹} = \sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱} = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱} = \sqrt{۳}+۱$

$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}} - ۲(\sqrt[۴]{۹}-۱) = \sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱ = \sqrt{۲}-۱$

ب) $\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}-۴-۹+\sqrt{۳}}{۱۶-۳} = \frac{۱۳(\sqrt{۳}-۱)}{۱۳} = \sqrt{۳}-۱$

$\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳} = ۲+\sqrt{۳}$

$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}} + (۲-\sqrt{۳})^{-۱} = \sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳} = ۱+۲\sqrt{۳}$

۴

الف) $\left(\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}\right)^۲ = \frac{۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{۳-۱}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = \frac{۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

$= \frac{۲(۳+۲+۲\sqrt{۶})}{۳-۲} = ۱۰+۴\sqrt{۶}$

ب) $\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}} - ۲ = \sqrt{۱۰+۴\sqrt{۶}}-۲ = \sqrt{(۲+\sqrt{۶})^۲}-۲ = \sqrt{۶}$

ب) $\sqrt[12]{2^{18}} \times \sqrt[12]{(3^4)^3 \times (2)^3} \times \sqrt[12]{2^{12} \times 3^3} = \sqrt[12]{3^{12} \times 2^{24}} = \boxed{2^2 \times 3 = 12}$

---

۵) $\frac{3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = \frac{3^x \times \left(\frac{3^6 - 1}{3 - 1}\right)}{2^{x-2} \times \left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\right)}$

$= \frac{3^x \times (3^2 - 1)(3^4 + 1 + 3^2)}{2^{x-2}(2^2 - 1)(2^4 + 1 + 2^2)} = \frac{3^x (9-1)(81+1+9) \times 2^{-1}}{2^{x-2}(4-1)(16+1+4)} = \frac{3^x \times 8 \times 91}{2^{x-2} \times 3 \times 21}$

$\Rightarrow \frac{3^{x-2} \times 13}{2^{x-4}} = 52 = 13 \times 4 \Rightarrow 3^{x-2} = 2^{x-4} \times 2^2 \Rightarrow 3^{x-2} = 2^{x-2} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

---

۶) $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 = ((a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2)^2 = (a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 4a^2b^2)^2$

$= ((a^2 - b^2)^2)^2 = (\sqrt{6} + 2 - \sqrt{6} + 2)^2 = (\sqrt{6} - 2 + \sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6 - 4})^2$

$= (2\sqrt{6} - 4\sqrt{2})^2 = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{t = 16}$

---

۷) $\left(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2}\right)^2 \left(a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2\right)^2 = a^4 + \frac{1}{a^4} + 2$

$= 7\sqrt{3} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} + 2 = 7\sqrt{3} + \frac{7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} + 2 = \boxed{16}$

---

۸) $A = 2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{4}{15}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{6}{15}} \times 2^{\frac{4}{15}} \times 2^{\frac{20}{15}} = 2^{\frac{30}{15}} = 2^2 \Rightarrow (2^3)^{\frac{-1}{3}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$۲۷ \times a^{\frac{۱۵}{۲}} = a^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۳^{۲۱} \times a^{۱۵} = a$$

$$\Rightarrow ۳^{۲۱} = a^{-۱۴} \Rightarrow a^{-۲} = ۳^{۳} \Rightarrow a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\frac{\left(\frac{۱}{a} - ۳\right)}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳} - ۳}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}$$

$$= \frac{۳(۳+۱-۲\sqrt{۳})}{۳-۱} = \frac{۱۲-۶\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{۶-۳\sqrt{۳}}$$

۹

$$\sqrt{x+۵} - \sqrt{x-۴} = ۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+۵} - \sqrt{x-۴} - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+۵} = \sqrt{x-۴} - ۲ + ۲\sqrt{x-۴}$$

$$= ۲\sqrt{x-۴}$$

$$= \sqrt{x+۵} + \sqrt{x-۴} - ۲$$

۱۰