Date: Sub:

زهرا دهقانی — گروه دهم دخترانه A — تکلیف شماره ۲۱

۱) $\underbrace{(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)}_{1+6=7}\underbrace{(2! + 4! + 6! + \dots 26!)}_{4+2=6}$

$1! = 1$ $\qquad$ $2! = 2$

$3! = 6$ $\qquad$ $4! = 24$

$5! = 120$ $\qquad$ $6! = 720$

$7! = 5040$ $\qquad$ $8! = 40320$

از ۵! به بعد بخاطر عامل ۵ و ۲ یکان صفر می‌شود

$7 \times 6 = 4\,2 \longrightarrow$ رقم یکان ۲

۲) الف) $\sqrt[4]{(4+\sqrt7)^{-1}}\ \sqrt{1+\sqrt7}$

$= (4+\sqrt7)^{-\frac14} \times (1+\sqrt7)^{\frac12}$

$= \dfrac{(1+\sqrt7)^{\frac12}}{(4+\sqrt7)^{\frac14}} = \dfrac{(1+\sqrt7)^{\frac24}}{(4+\sqrt7)^{\frac14}} = \left(\dfrac{(1+\sqrt7)^2}{(4+\sqrt7)}\right)^{\frac14}$

$(1+\sqrt7)^2 = 1 + 7 + 2\sqrt7 = 8 + 2\sqrt7$
$= 2(4+\sqrt7)$

$\left(\dfrac{2\cancel{(4+\sqrt7)}}{\cancel{(4+\sqrt7)}}\right)^{\frac14} = 2^{\frac14} = \sqrt[4]{2}$

Date:　　　　Sub:

2

ب) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\right)\underbrace{\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}_{\text{به توان ۲ می رسانیم}}$

$$(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})-2\sqrt{\underbrace{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}_{\text{مزدوج}}}$$

$$\Downarrow\quad 6-2\sqrt{9-5}=6-2\sqrt{4}=2$$

به توان ۲ رسانده بودیم، پس حالا جذر می گیریم

$$\Rightarrow \pm\sqrt{2} \rightarrow +\sqrt{2}$$

$$\rightarrow -\sqrt{2}$$

چون $\sqrt{3-\sqrt{5}} < \sqrt{3+\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\times(-\sqrt{2})=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+2}$$

$$=\frac{-\cancel{(2+\sqrt{10})}}{\cancel{(2+\sqrt{10})}}=\boxed{-1}$$

Date: Sub:

۳

الف) $\dfrac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}} - ۲\left(\cancel{\sqrt[۴]{۹}}^{\sqrt{۳}} - ۱\right)^{-۱}$

$\dfrac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۶}} \times \dfrac{۵+\sqrt{۶}}{۵+\sqrt{۶}} = \dfrac{۱۴\sqrt{۲}+۱۴\sqrt{۳}}{۲۵-۱۶}$

گویا می‌کنیم مخرج را

$= \dfrac{\cancel{۱۴}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\cancel{۱۴}} = \sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

$\dfrac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \times \dfrac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \dfrac{۲\sqrt{۳}+۲}{۳-۱} = \dfrac{\cancel{۲}(\sqrt{۳}+۱)}{\cancel{۲}} = \sqrt{۳}+۱$

گویا می‌کنیم مخرج را

$\Longrightarrow (\sqrt{۲}+\sqrt{۳}) - (\sqrt{۳}+۱) = \boxed{\sqrt{۲}-۱}$

Date: Sub:

ب) $\underbrace{\dfrac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}} + \underbrace{(2-\sqrt{3})^{-1}}$ ۳

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

مخرج را گویا می‌کنیم

$$\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}-13}{16-3} = \frac{\cancel{13}(\sqrt{3}-1)}{\cancel{13}} = \sqrt{3}-1$$

مخرج را گویا می‌کنیم

$$\Longrightarrow (\sqrt{3}-1)+(2+\sqrt{3}) = \boxed{2\sqrt{3}+1}$$

۴

الف) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ — ۲

صورت $\longrightarrow$ $(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{\underbrace{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}_{\text{مزدوج}}}$

بتوان ۲ می‌رسانیم

$\Longrightarrow 2\sqrt{3}+2\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

آن موقع بتوان ۲ رسانده بودیم

پس حالا جذر می‌گیریم

$$\longrightarrow \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

مخرج را گویا می‌کنیم

$$\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}$$

$$=\frac{2(5+2\sqrt{6})}{1}=10+4\sqrt{6}$$

۶ ادامه

$$\underbrace{\sqrt{10+4\sqrt{6}}}_{(\sqrt{6}+2)^2} \Rightarrow \sqrt[\cancel{2}]{(\sqrt{6}+2)^{\cancel{2}}} = |\sqrt{6}+2| = \sqrt{6}+2$$

تبدیل به مربع ۲ جمله ای کردیم

کل عبارت $\Longrightarrow (\sqrt{6}+2)-2 = \boxed{\sqrt{6}}$

Date: Sub:

۴

ب) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^8}} \times \sqrt[4]{162} \times \sqrt{4\sqrt[6]{2}}$

$$\sqrt[12]{2^8} \times \sqrt[4]{2 \times 3^4} \times \sqrt[12]{2^{13}}$$

$$= 2^{\frac{8}{12}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{4}{4}} \times 2^{\frac{13}{12}}$$

$$= 2^{\frac{8}{12} + \frac{1}{4} + \frac{13}{12}} \times 3^{1}$$

$$= 2^{\frac{24}{12}} \times 3 = 2^{2} \times 3 = 4 \times 3 = \boxed{12}$$

Date: Sub:

۵

$$\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$$

$$\frac{3^x \overbrace{\cancel{(1+3+9+27+81+243)}}^{364}}{2^x \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8\right)}}_{\frac{63}{4}}}$$

$$= \frac{\frac{3^x \times 364}{1}}{\frac{2^x \times 63}{4}} = \frac{3^x \times 364 \times 4}{2^x \times 63} = \frac{3^x \times 208}{2^x \times 9} = \frac{3^x \times 2^4 \times 13}{2^x \times 3^2}$$

$$\frac{3^x \times 2^4 \times 13}{2^x \times 3^2} = 13 \times 2^2 \rightarrow 2^x \times 3^2 \times \cancel{13} \times \cancel{2^2} = 3^x \times \cancel{2^4}^{\,2^2} \times \cancel{13}$$

$$2^x \times 3^2 = 3^x \times 2^2 \Longrightarrow \begin{cases} 3^2 = 3^x \rightarrow x = 2 \\ 2^2 = 2^x \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2}$$

Date: Sub:

6

$$\because (a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2 = f(2-\sqrt{4})$$

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$$

$$= \big((a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)\big)^2 = (a^2-b^2)^4$$

$$a^2-b^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2} = -\left(\sqrt{\sqrt{6}+2} - \sqrt{\sqrt{6}-2}\right)$$

$$(a^2-b^2)^4 = \Big(\underbrace{\sqrt{\sqrt{6}+2} - \sqrt{\sqrt{6}-2}}\Big)^4$$

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{6}+2} - \sqrt{\sqrt{6}-2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}\right)}{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sqrt{6}+2}\right)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{6}-2}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}} = \frac{(\sqrt{6}+2)-(\sqrt{6}-2)}{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 4} \left(\frac{4}{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}}\right)^4 = \frac{256}{\Big(\underbrace{\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}}\Big)^4}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{6}+2} + \sqrt{\sqrt{6}-2}\right)^2 = (\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2) + 2\underbrace{\sqrt{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}}_{\text{مزدوج}}$$

$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6-4} = 2\sqrt{6}+2\sqrt{2} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$\longrightarrow (a^{۲}-b^{۲})^{۴} = \frac{۲۵۶}{۱۶(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۴}} = \frac{۱۶}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۴}}$$ ۶ ادامه

$$f = \frac{(a^{۲}-b^{۲})^{۴}}{۲-\sqrt{۳}} = \frac{\frac{۱۶}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۴}}}{۲-\sqrt{۳}} = \frac{۱۶}{(۲-\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۴}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f = \frac{۱۶}{(۲-\sqrt{۳})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۴}}}$$

Date: Sub:

$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{۲})^{۲}(a+\frac{1}{a}-\sqrt{۲})^{۲}$

$(x+\sqrt{۲})^{۲}(x-\sqrt{۲})^{۲}=(x^{۲}-۲)^{۲}$ ۷

$۷-۴\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^{۲}\rightarrow a^{۲}=۲-\sqrt{۳}$

$\frac{1}{a^{۲}}=۲+\sqrt{۳}$

$(a+\frac{1}{a})^{۲}=a^{۲}+\frac{1}{a^{۲}}+۲=(۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})+۲$

$=۶$

$(x^{۲}-۲)^{۲}=(۶-۲)^{۲}=۴^{۲}=۱۶$

$۱۶=۲^{۴}\longrightarrow f=۴$

۸

$\sqrt[۳]{۱۶}=۱۶^{\frac{1}{۳}}=(۲^{۴})^{\frac{1}{۳}}=۲^{\frac{۴}{۳}}$

$۴\sqrt[۳]{۱۶}=۲^{۲}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۱۰}{۳}}$

$\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}=(۲^{\frac{۱۰}{۳}})^{\frac{1}{۵}}=۲^{\frac{۲}{۳}}$

$(\frac{1}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۴}{۳}}$ $A=۲^{\frac{۲}{۳}}\times۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۲}$

$A=۴$

$(۲A)^{-\frac{1}{۳}}\Rightarrow ۲A=۸=۲^{۳}$

$(۲A)^{-\frac{1}{۳}}=(۲^{۳})^{-\frac{1}{۳}}=۲^{-1}=\frac{1}{۲}$

PITICO

$\sqrt[۷]{a} = ۲۷ a^{\frac{۱۵}{۷}}$ ۴

$a^{\frac{۱}{۷}} = ۲۷ a^{\frac{۱۵}{۷}} \to a^{-\frac{۱۴}{۷}} = ۲۷ \to a^{-۲} = ۲۷$

$a^{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲۷}} \to a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

$\frac{۱}{a} - ۳ = ۳\sqrt{۳} - ۳ = ۳(\underbrace{\sqrt{۳} - ۱}_{\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}})$

$۳ \times \frac{۲}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۶}{\sqrt{۳}+۱}$

$\frac{\frac{۱}{a} - ۳}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{\frac{۶}{\sqrt{۳}+۱}}{\frac{\sqrt{۳}+۱}{۱}} = \boxed{۶}$

$k = \sqrt{x+a} \qquad l = \sqrt{x-۴}$ ۱۵

$k - l = ۲$

$k^{۲} - l^{۲} = (x+a) - (x-۴) = a+۴$

$k - l^{۲} = (k-l)(k+l)$

پس

$۲(k+l) = a+۴ \Rightarrow k+l = \frac{a+۴}{۲}$

$k + l - ۲ = \frac{a+۴}{۲} - ۲ = \boxed{\frac{a}{۲}}$ جواب