

۱۴۰۴، ۱۱، ۹

«به نام خدا»

بریاگل محتسبی

۱) رقم یکان عدد (۲۹۱ + ۹۱ + ۴۱ + ۲۱) (۲۵۱ + ۱۱ + ۳۱ + ۵۱ + ... + ۲۵۱) باید ۲ باشد.
 ↓ ↓
 رقم‌های یکان صفر ۲ ۴
 رقم یکان‌ها صفر ۱ ۶
 $7 \times 4 = 28$

۲) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)
$$\sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{1}{(1+\sqrt{7})^2}} \sqrt{1+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2}} \sqrt{1+\sqrt{7}} = \boxed{\sqrt[4]{1}}$$

ب)
$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{1}+2} \right) \left(\sqrt{2-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} A = \frac{1}{\sqrt{2}} \times -\sqrt{2} = \boxed{-1}$$

حقیقی است چون $\sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{2-\sqrt{5}}$ $A^2 = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{4} = 2 \rightarrow A = -\sqrt{2}$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)
$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt{3}-1)^{-1} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(5-\sqrt{6})}{5-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \boxed{\sqrt{2}-1}$$

ب)
$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(4+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \boxed{1+2\sqrt{3}}$$

۴) حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)
$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - 2 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - 2 = \boxed{\sqrt{6}}$$

$$A^2 = \cancel{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \quad Z^2 = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 2(5+2\sqrt{6})$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt[4]{192} \times \sqrt[5]{4\sqrt{2}} = 2^{\frac{8}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^2 \times 2 = 12$$

۵) اگر $\frac{3^{\alpha+3} + 3^{\alpha+2} + 3^{\alpha+1} + 3^{\alpha} + 3^{\alpha-1} + 3^{\alpha-2} + 3^{\alpha-3}}{3^{\alpha-2} + 3^{\alpha-1} + 3^{\alpha} + 3^{\alpha+1} + 3^{\alpha+2} + 3^{\alpha+3}} = 52$ باشد مقدار α کدام است؟

$$\frac{3^{\alpha}(1+3+9+27+81+243)}{3^{\alpha} \times 3^{-2}(1+3+9+27+81+243)} = 52 \rightarrow \left(\frac{3}{3}\right)^{\alpha} \times \frac{364}{43} = \frac{52}{4} \rightarrow \left(\frac{3}{3}\right)^{\alpha} = 13 \times \frac{43}{364}$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{3}\right)^{\alpha} = \frac{43}{18} = \frac{9 \times 5}{4 \times 9} \rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

۶) فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{4}-2}$ ، $b = \sqrt[4]{\sqrt{4}+2}$ ، درستی $(a^2+b^2-2ab)^2 = 4(2-\sqrt{3})$ را با a و b ثابت کنید.

$$\left((a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\right)^2 = (a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2)^2 = (a^4+b^4-2a^2b^2)^2 = (\sqrt{4}-2 + \sqrt{4}+2 - 2 \times \sqrt{4-2} \times \sqrt{4+2})^2 = (2\sqrt{4} - 2\sqrt{3})^2 = 4(4-4\sqrt{3}) = 16(2-\sqrt{3})$$

$$4(2-\sqrt{3}) = 4(4-4\sqrt{3}) \rightarrow 4(2-\sqrt{3}) = 16(2-\sqrt{3}) \quad \boxed{4=16}$$

۷) فرض کنید $a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ ، درستی $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2 = 2^4$ را با a و $\frac{1}{a}$ ثابت کنید.

$$2^4 = \left((a + \frac{1}{a})^2 - 2\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(2-\sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \left(2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3}\right)^2 = 16$$

۸) اگر $\frac{1}{A} = \sqrt[5]{4\sqrt{16}}$ باشد حاصل $\frac{1}{A}$ را با A ثابت کنید.

$$A = 2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4 \quad \left(\frac{1}{A}\right)^{-\frac{1}{5}} = (2^2)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

۹) ریشه هفتم عدد مثبت a ، حاصلی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $(\frac{1}{a} - 3)$ چند برابر $(1 + \sqrt{3})$ است؟

$$a^{\frac{1}{7}} = 27 a^{\frac{15}{7}} \rightarrow a^{\frac{1}{7}} \times 27 = 1 \rightarrow a^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{27} \rightarrow a = \frac{1}{27^7}$$

$$\left(\frac{1}{a} - 3\right) = 3(\sqrt{3}-1) \rightarrow \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \boxed{3(2-\sqrt{3})}$$

۱۰) اگر $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4}$ را با x و a ثابت کنید.

$$\sqrt{x+a} = 2 + \sqrt{x-4} \rightarrow x+a = 4 + x - 4 + 4\sqrt{x-4} \rightarrow \sqrt{x-4} = \frac{a}{4}$$

$$\sqrt{x+a} = 2 + \frac{a}{4} \quad \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2 = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$$