به نام خدا

زهرا سهرابی

۲۵

مقطع : دهم دختر A **شماره‌ی تکلیف: ۲۱**

۱) رقم یکان عدد $(1!+3!+5!+\cdots+25!)(2!+4!+6!+\cdots+26!)$ را بیابید.

$1! \to 1$ (رقم یکان)، $3! \to 6$، $5! = 3! \times 4 \times 5 = 120 \to$ رقم یکان $=0$

هر رقم یکان صفر، $1+6=7$

$2! \to 2$، $4! \to 4$، $6! \to 0$، $4+2=6$

$7 \times 6 = 42$

۳

۲) الف) $\sqrt[4]{\left(4+\sqrt{7}\right)^{-1}}\ \sqrt[4]{\left(1+\sqrt{7}\right)^{2}}$

$\to \frac{1}{\sqrt[4]{4+\sqrt7}} \times \sqrt[4]{(1+\sqrt7)^2} \to \sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt7)^2}{\frac{(1+\sqrt7)^2}{2}}} \to \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$

$\frac{(1+\sqrt7)^2}{2} \to \frac{1+7+2\sqrt7}{2} = \frac{8+2\sqrt7}{2} = 4+\sqrt7$

ب) $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$

$\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2(\sqrt5+\sqrt2)} = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}\left(\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}\right) \to \frac12\left(\sqrt2\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt2\sqrt{3+\sqrt5}\right) \to \frac12\left(\sqrt{(1-\sqrt5)^2}-\sqrt{(1+\sqrt5)^2}\right) \to \frac12\left(|1-\sqrt5|-|1+\sqrt5|\right)$

$\frac12(\sqrt5-1-1-\sqrt5) = -1$

۲

۳) الف) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2\left(\sqrt[4]{9}-1\right)^{-1}$

$\frac{2\sqrt2+3\sqrt3}{5-\sqrt6} \times \frac{5+\sqrt6}{5+\sqrt6} = \frac{19\sqrt2+19\sqrt3}{19} \to \sqrt2+\sqrt3-\sqrt3-1 = \sqrt2-1$

$\frac{2}{\sqrt3-1} \times \frac{\sqrt3+1}{\sqrt3+1} = \sqrt3+1$

ب) $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \longrightarrow \sqrt3-1+2+\sqrt3 = 2\sqrt3+1$

$\frac{1}{2-\sqrt3} \times \frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3} = 2+\sqrt3$

۳

۴) الف) $\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^{2}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}-2$

$\to \frac{1+\sqrt3+\sqrt3-1+2\sqrt2}{\sqrt3-\sqrt2} \times \frac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2} \to \frac{2\sqrt3+2\sqrt2}{1} \times \sqrt3+\sqrt2 \to \sqrt{\frac{2(\sqrt3+\sqrt2)}{1}} = \sqrt2 \times (\sqrt3+\sqrt2)$

$\sqrt6+2-2 = \sqrt6$

ب) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{8}}}\times\sqrt[4]{162}\times\sqrt{4\sqrt[6]{2}}$

$2^{\frac{8}{12}} \times 3 \sqrt[4]{2} \times 2^{\frac{13}{12}} = 2^{\frac{8+3+13}{12}} \times 3 = 2 \times 3 = 12$

۳

۵) $\frac{3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}+3^{x+5}}{2^{x-2}+2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}}=52$

$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)} = 52 \to \dots \to 3^{x-2} = 2^{x-2} \to x-2=0 \to x=2$

۲

۶) $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$، $\left(a^{2}+b^{2}-2ab\right)^{2}\left(a^{2}+b^{2}+2ab\right)^{2}=t\left(2-\sqrt{3}\right)$

$(a-b)^4(a+b)^4 = t(2-\sqrt3)$

$(a^2-b^2)^4 \to \left((a^2-b^2)^2\right)^2 = (a^4-2a^2b^2+b^4)^2$

$a^4 = \sqrt6-2$، $b^4 = \sqrt6+2$

$a^2b^2 = \sqrt{\sqrt6-2} \times \sqrt{\sqrt6+2} = \sqrt{6-4} = \sqrt2$

$(\sqrt6-2\sqrt2+\sqrt6+2)^2 = (2\sqrt6-2\sqrt2)^2 = 4(\sqrt6-\sqrt2)^2 = 4(8-2\sqrt{12}) \to 16(2-\sqrt3)$ جواب آخر

۳

۷) $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$، $\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}\right)^{2}\left(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}\right)^{2}=2^{t}$

$\left(\left(a+\frac1a\right)^2-(\sqrt2)^2\right)^2 = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2$

$a = \sqrt{2-\sqrt3}$، $a^2 = 2-\sqrt3$

$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2-\sqrt3} \times \frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3} = 2+\sqrt3$

$(2-\sqrt3+2+\sqrt3)^2 = 16$

$2^t = 16$

$t = 4$

۳

۸) اگر $A = \sqrt[۵]{۴\underbrace{\sqrt[۳]{۱۶}}_{۲^{\frac{۴}{۳}}}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $\underbrace{(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}}$ را بیابید.

$\sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} \to ۲^{\frac{۱۰}{۱۵}} = ۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}}$

$A = ۲^{\frac{۶}{۳}} = ۴$

$(۸)^{-\frac{۱}{۳}} = (۲^{۳})^{-\frac{۱}{۳}} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

۹)

$\sqrt[۷]{a} = ۲۷a^{\frac{۱۵}{۷}} \to a = ۲۷^{۷}a^{۱۵} \to a^{۱۴} = ۳^{-۲۱}$

$(a^{۱۴})^{\frac{۱}{۱۴}} = (۳^{-۲۱})^{\frac{۱}{۱۴}} \to a = ۳^{\frac{-۲۱}{۱۴}} = ۳^{-\frac{۳}{۲}} \to \frac{۱}{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲۷}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

$\frac{۱}{a} = ۳\sqrt{۳},\ ۳ = ۳(\sqrt{۳}-۱)$

$\frac{\frac{۱}{a}-۳}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱} \times \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}{۲} = \frac{۳}{۲}(۳+۱-۲\sqrt{۳}) = \boxed{۶-۳\sqrt{۳}}$

جواب آخر

۱۰) $\underbrace{\sqrt{x+a}}_{A} - \underbrace{\sqrt{x-۴}}_{B} = ۲$

$A - B = ۲$

$(A = B+۲)^{۲}$

$A^{۲} = B^{۲} + ۴ + ۴B$

$x + a = x - ۴ + ۴ + ۴\underbrace{\sqrt{x-۴}}_{B}$

$B = \frac{a}{۴} \to ۴B = a$

$\sqrt{x+a} + \underbrace{\sqrt{x-۴}} - ۲$

$A + B - ۲ = ?$

$B + \cancel{۲} + B - \cancel{۲} = ?$

$۲B = ۲\left(\frac{a}{۴}\right) = \boxed{\frac{a}{۲}}$