

۱۴۰۴، ۱۱، ۱۶

» به نام خدا «

برای کل محدثی

۱) اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha + \beta^5}{5\beta^2}$ را بیابید.

$$p = \alpha\beta = 2 \rightarrow \alpha = \frac{2}{\beta} \quad \alpha = \frac{2}{\beta} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} \quad a^3 + b^3 = S^3 - 3ps$$

$$\frac{\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{\frac{1}{\beta} + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\beta^3} + \beta^3 \right) =$$

$$\frac{1}{5} \left(\left(\frac{2}{\beta} + \beta \right)^3 - 3(2) \left(\frac{2}{\beta} + \beta \right) \right) = \frac{1}{5} (S^3 - 4S) =$$

$$\frac{1}{5} (125 - 4 \times 5) = \frac{1}{5} (125 - 20) = \frac{105}{5} = \textcircled{13}$$

۲) نقاط $(3, -4)$ ، $(-1, 5)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع را بیابید.

$$\alpha_S = \frac{(3) + (-1, 5)}{2} = \frac{2}{2} \quad \alpha_2, \alpha_1 \leftarrow$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha_S \rightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \textcircled{1, 5}$$

۳) اختلاف ریشه های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $k \frac{4}{3}$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2} \right]$ را بیابید.

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4k^2 - 20}}{1} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

$$\hookrightarrow \cancel{2} \sqrt{k^2 - 5} = \frac{\cancel{4}}{3} k \rightarrow k^2 - 5 = \frac{4k^2}{9} \rightarrow$$

$$\cancel{\frac{4}{9}} k^2 = \cancel{4} \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3 \rightarrow \left[\frac{k^2}{2} \right] = \left[\frac{9}{2} \right] = \textcircled{4}$$

۴) نقاط $A(3, 4)$ ، $B(-5, 4)$ روی یک سهمی واقع شده اند. عرض رأس سهمی برابر است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی

باطل‌های α ، β قطع کند $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سری محورهای a در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$x_S = \frac{-5+3}{2} = -1 \quad / \quad y_S = 1$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = -1 \rightarrow \alpha+\beta = -2 \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p = 5$$

$$\rightarrow 4 - 2p = 5 \rightarrow -2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{محور } y \text{ ها در نقطه } C = \left(\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

(۵) برای چند مقدار صحیح m هر دو ریشه معادله $x^2 + 5x + m = 0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{2}$ است؟ $\{ -6, -5, -4, -3 \} \rightarrow 4$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4m}}{-2}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{-5 + \sqrt{25+4m}}{-2} < \frac{9}{2} \rightarrow \sqrt{25+4m} < 9 \rightarrow \text{هواد برقرار}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{-5 - \sqrt{25+4m}}{-2} < \frac{9}{2} \rightarrow \sqrt{25+4m} < 9 \rightarrow 25+4m < 81$$

$$\rightarrow -2 - 25 \leq 4m < -9 \rightarrow \frac{-25}{4} \leq m < \frac{-9}{4}$$

(۶) کمترین مقدار تابع $y = m\alpha^2 - 12\alpha + 5m - 4$ برای α برابر ۲ است. محور تقاطع سری با بیابید. $m > 0$ $\leftarrow \min$

$$\min = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4m(5m-1)-144}{4m} = 2 \rightarrow 2 \cdot m^2 - 4m - 144 = 4m$$

$$5m^2 - m - 144 = 2m \rightarrow 5m^2 - 3m - 144 = 0 \rightarrow (5m+12)(m-3) = 0$$

$$\rightarrow m = \frac{-12}{5} \quad \text{یا} \quad 3 \quad \rightarrow y = 3x^2 - 12x + 14 \rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

$$m > 0 \rightarrow x = 2 \quad \text{خط} \quad \alpha = 2 \quad \text{محور تقاطع است.}$$

(۷) اگر α ، β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند،

ارزای کدام مقدار a ، به ترتیب α ، a ، β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

$$\rightarrow \alpha\beta = a^2$$

$$\rightarrow \alpha\beta = 2a - 1 \rightarrow a^2 = 2a - 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a-1)^2 = 0$$

$$\boxed{a=1}$$

اگر قواعد هندسی تشکیل دهند: $a, b, c \rightarrow ac = b^2$

۱) اگر مجموع حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب P, S باشند حاصل عبارت $2P^2 - 3SP + 2S$ را بیابید.
در معادله $ax^4 + bx + c = 0$ جمع ریشه‌ها همیشه صفر است.

فرض کنیم $x^2 = t$ - غنقن چون $t \geq 0$ هواره.

$$x^2 = t \rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49}}{2}} \rightarrow S = 0, P = -\frac{(\sqrt{7 + \sqrt{49}})^2}{2}$$

$$P = -\frac{7 + \sqrt{49}}{2} \rightarrow 2P^2 - 3SP + 2S = 2 \times \frac{11^2 + 14\sqrt{49}}{4} = \frac{59 + 7\sqrt{49}}{2}$$

۲) رأس سی $y = kx^2 - 4x - 4$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سی را بیابید.

ext $\left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k} \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-24k + 16}{4k} = \frac{-6k + 4}{k} \end{array} \right.$

$$\frac{-6k + 4}{k} = \frac{-1 - 4k}{k} \rightarrow -6k + 4 = -1 - 4k \rightarrow 2k = 12 \rightarrow k = 6$$

$$k = 6 \rightarrow \frac{-6 \times 6 + 4}{6} = \frac{-32}{6} = \frac{-16}{3}$$

۳) سی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در یک نقطه ای قطع نمی کنند. عدد m شامل چند عدد صحیح است؟

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \rightarrow mx^2 + (-m-1)x - (1+m) = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 + 4m(1+m) < 0$$

$$5m^2 + 6m + 1 < 0 \rightarrow (m+1)(5m+1) < 0$$

$$-1 < m < -\frac{1}{5}$$

شامل ۰ عدد صحیح

