۱)

$-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$

$\hookrightarrow (1,3):\ 1=a(3+1)^2+9 \qquad a=-\frac{1}{2}$

$ax^2+bx+c=$

$(x+1)^2=x^2+2x+1$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}+9$

$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{17}{2}$

---

۲)

$\Delta=b^2-4ac=m^2-8(m+6)=m^2-8m-48$

$m^2-8m-48>0 \qquad m=12,\ -4$

$(m-12)(m+4)>0 \qquad m>12 \quad m<-4$

	-4		12	
$+$		$-$		$+$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{2} \longrightarrow -\frac{m}{2}>0 \qquad m<0$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m+6}{2} \longrightarrow \frac{m+6}{2}>0 \qquad m+6>0 \qquad m>-6$

$\left.\begin{array}{l} m>12 \text{ یا } m<-4 \\ m<0 \\ m>-6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\ \cap\ } -6<m<-4$

---

۳)

$\Delta>0 \longrightarrow b^2-4ac>0$

$-\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$-bc=a^2 \longrightarrow (-2m+1)(2-m)=9$

$2m^2+5m-7=0 \qquad \Delta=25+56=81 \qquad m=\frac{5\pm 9}{2}=\frac{7}{2},\ -1$

$m=-1:\ \Delta=25-56<0$ غ ق ق

$m=\frac{7}{2}:\ \Delta>0\ \checkmark$

---

۴)

$x^2-x-4=0 \qquad x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{1}{1}=1 \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4}{1}=-4$

$\alpha=x_2^3+\frac{1}{x_1} \qquad \beta=x_1^3+\frac{1}{x_2}$

$\alpha+\beta=x_2^3+x_1^3+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=(x_2+x_1)^3-3x_1x_2(x_2+x_1)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$=1+12-\frac{1}{4}=\frac{52-1}{4}=\frac{51}{4}$

$\alpha\beta=\left(x_2^3+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_1^3+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1x_2)^3+x_2^2+x_1^2+\frac{1}{x_1x_2}$

$=-64+(x_2+x_1)^2-2x_1x_2-\frac{1}{4}=-64+9-\frac{1}{4}=-\frac{221}{4}$

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=4x^2-51x-221=0$

---

۵)

$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x} \qquad \sqrt[3]{x^2}=y$

$\left(y+\frac{1}{y}+1\right)(y-1)=2x^{\frac{1}{3}}$

$\left(y+\frac{1}{y}+1\right)(y-1)=y(y-1)+\frac{1}{y}(y-1)+(y-1)$

$y^2-y+1-\frac{1}{y}+y-1=y^2-\frac{1}{y}$

$y^2-\frac{1}{y}=2x^{\frac{1}{3}}$

$=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=2x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}=2x^{\frac{1}{3}}$

$\xrightarrow{\times\left(x^{\frac{2}{3}}\right)} x^{\frac{4}{3}}\times x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\times x^{\frac{2}{3}}=2x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{2}{3}}$

$x^2-1=2x \rightarrow x^2-2x-1=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$x_1+x_2=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

(۶

$x_۲ = ۳x_۱$ $\quad ۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$

$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = \frac{a}{۳}$, $x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۳} \to x_۱ \times ۳x_۱ = ۳x_۱^۲ = \frac{۴}{۳}$

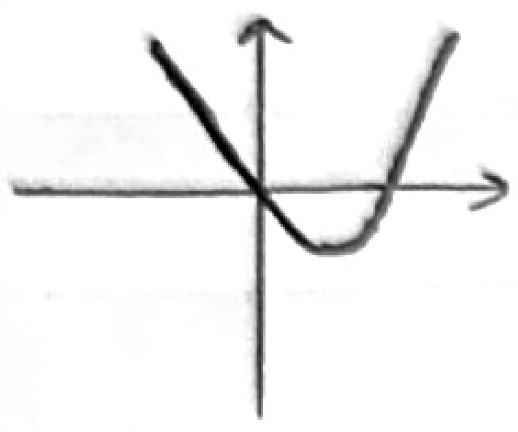
$x_۱ + ۳x_۱ = ۴x_۱ = \frac{a}{۳} \to a = ۱۲x_۱$ $\quad x_۱^۲ = \frac{۴}{۹}$ $\quad x_۱ = \pm\frac{۲}{۳}$

$x_۱ = \frac{۲}{۳}$: $a = ۱۲(\frac{۲}{۳}) = ۸$

$x_۱ = -\frac{۲}{۳}$: $a = ۱۲(-\frac{۲}{۳}) = -۸$ $\quad |۸ - (-۸)| = ۱۶$

(۷

$y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x$ $\quad \underbrace{x_۱ + x_۲}_{\text{۲ ریشه}} = -\frac{b}{a} \geq ۰ \to \frac{-۲a-۳}{a} \geq ۰$ $\quad a = -\frac{۳}{۲}, ۰$



$a > ۰$

$\Delta < ۰$

$-\frac{۳}{۲}$		۰	
$-$	$+$		$-$

$-\frac{۳}{۲} \leq a < ۰$ مقدار صحیح ندارد.

$a = ۰ \to y = ۳x \to$ از ربع ۳ام نگذرد.

(۸

$y = x^۲ + ax - ۲ \to x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-a}{۲}$ $\quad y = -x^۲ - ۲x + b \to x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲}{-۲} = -۱$

$-\frac{a}{۲} = -۱ \to a = ۲$

سهمی اول: $-۱ + ۲ = ۱$

سهمی دوم: $-۱ - ۲ = -۳$ $\quad \to ۱ = -(-۳)^۲ - ۲(-۳) + b$

$۱ = -۹ + ۶ + b \to b = ۴$ $\quad ab = ۲ \times ۴ = ۸$

(۹

$۲x^۲ - ax + b = ۰ \to \alpha + \frac{۱}{۲}, \ \beta + \frac{۱}{۲}$ $\quad \alpha + \frac{۱}{۲} + \beta + \frac{۱}{۲} = \frac{a}{۲}$ $\quad a = ۱$

$(\alpha + \frac{۱}{۲})(\beta + \frac{۱}{۲}) = \alpha\beta + \frac{\alpha+\beta}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{b}{۲}$

$۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰ \to \alpha, \ \beta$ $\quad \alpha + \beta = \frac{-a}{۲a} = -\frac{۱}{۲}$ $\quad \frac{b}{۲} = -۳$ $\quad b = -۶$

$\alpha\beta = \frac{-۶}{۲a} = \frac{-۶}{۲} = -۳$

$[\frac{ab}{۴}] = [\frac{(-۶)(۱)}{۴}] = [-\frac{۳}{۲}] = -۲$

(۱۰

$x^۲ + ۶x + m = ۰ \to \alpha, \ \beta_۱$ $\quad \alpha + \beta_۱ = \frac{-b}{a} = -۶$

$x^۲ + ۲x - ۳m = ۰ \to \alpha, \ \beta_۲$ $\quad \alpha + \beta_۲ = \frac{-b}{a} = -۲$

$\begin{cases} \alpha + \beta_۱ = -۶ \\ \alpha + \beta_۲ = -۲ \end{cases}$

$|\beta_۱ - \beta_۲| = |(-۶) - (-۲)| = |-۴| = ۴$