آنا شکرچی

$A(-۱,۹) \xrightarrow{\text{راس}} y = ax^۲+bx+c$

①

$\frac{-b}{۲a} = -۱$ $\quad -۲a = -b$ $\quad ۲a = b$

$۱ = ۹a + ۳\underbrace{b}_{۲a} + c = ۱۵a + c$

$۱۵a + c = ۱$ $\quad c = ۱ - ۱۵a$

$\frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-b^۲+۴ac}{۴a} = ۹$ $\quad ۳۶a = -b^۲ + ۴ac$

$۳۶a = -(۲a)^۲ + ۴ac$

$۳۶a = -۴a^۲ + ۴a\boxed{c} \to ۱-۱۵a = -۴a^۲ + ۴a - ۶۰a^۲ = -۶۴a^۲ + ۴a$

$-۶۴a^۲ - ۳۲a = ۰$

$-۳۲a(۲a+۱) = ۰ \to ۲a+۱ = ۰ \quad a = \frac{-۱}{۲}$

$\hookrightarrow ۲\times\frac{-۱}{۲} = b = -۱$

$c = ۱ - ۱۵\times\frac{-۱}{۲} = \frac{۱۷}{۲}$

$y = \frac{-۱}{۲}x^۲ - x + \frac{۱۷}{۲}$ ✓

---

②

$۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$

$\Delta > ۰ \quad b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۸m + ۴۸ > ۰ \quad (m-۱۲)(m+۴) > ۰ \quad m > ۱۲,\ m < -۴$

$\frac{-b}{a} > ۰ \quad \frac{-m}{۲} > ۰ \quad -m > ۰ \quad m < ۰$

$\to \boxed{-۶ < m < -۴}$

$\frac{c}{a} > ۰ \quad \frac{m+۶}{۲} > ۰ \quad m+۶ > ۰$

$m > -۶$

---

③

$۳x^۲ + (۲m-۱)x + ۲ - m = ۰$

$\beta + \alpha = \frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{\alpha\beta} \to \underbrace{\alpha\beta}_{P}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S} = ۱ \quad P\times S = ۱ \quad \frac{c}{a}\times\frac{-b}{a} = \frac{-cb}{a^۲} =$

$a^۲ = -cb$

$۳^۲ = (۲m-۱)(۲-m)\times -۱$

$۰ = (۲m+۲)(۲m-۷)$

$\hookrightarrow m = -۱$ و $m = \frac{۷}{۲}$

if

$m = -۱ \quad \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۳۶ = -۲۷$ ✗ غیرقابل قبول

$m = \frac{۷}{۲} \quad \Delta = ۳۶ - (-۱۸) = ۵۴ > ۰$ ✓

$\hookrightarrow \boxed{m = \frac{۷}{۲}}$ ✓

---

④

$x = x^۲ - ۴ \to x^۲ - x - ۴ = ۰ \qquad x_۱ + x_۲ = ۱$ و $x_۱x_۲ = -۴$

ریشه‌های معادله

$x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱} \to$

$S = x_۱^۳ + x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} =$

$x_۱^۳ + x_۲^۳ = (x_۱+x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)$

$۱ - ۳(-۴)(۱) = ۱۳$

$\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲} = \frac{۱}{-۴}$

$S = ۱۳ - \frac{۱}{۴} = \boxed{\frac{۵۱}{۴}} = S$

$P = (x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱})(x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲}) =$

$\hookrightarrow x_۱^۳x_۲^۳ + \underbrace{x_۱^۲ + x_۲^۲}_{(x_۱+x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ = ۱^۲ - ۲(-۴) = ۹} + \frac{۱}{x_۱x_۲} = (-۴)^۳ + ۹ - \frac{۱}{۴} = \boxed{\frac{-۲۲۱}{۴}} = P$

پاسخ

معادله جدید

$\boxed{۴t^۲ - ۵۱t - ۲۲۱ = ۰}$

-⑤

$$\left(\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}-۱\right)=۲\sqrt[۳]{x}$$

$x_۱+x_۲=?$

$\sqrt[۳]{x}=t$

$(t^۲+\frac{۱}{t^۲}+۱)(t^۲-۱)=۲t \longrightarrow t^۴\cancel{-t^۲}\cancel{+۱}-\frac{۱}{t^۲}\cancel{+t^۲}\cancel{-۱}=۲t$

$(t^۴-\frac{۱}{t^۲}=۲t)\Rightarrow t^۶-۱=۲t^۳$

$\hookrightarrow t^۶-۲t^۳-۱=۰$

$x=\frac{۲\pm\sqrt{۸}}{۲}=\rightarrow ۱\pm\sqrt{۲}$

$x_۱+x_۲=۱+\cancel{\sqrt{۲}}+۱-\cancel{\sqrt{۲}}=\boxed{۲}$

---

-⑥

$۳x^۲-ax+۴=$ $\quad \beta=۳\alpha$

$\underbrace{\beta+\alpha}_{۴\alpha}=\frac{a}{۳}$ و $\underbrace{\beta\alpha}_{۳\alpha^۲}=\frac{۴}{۳}$

$\hookrightarrow \alpha=\frac{a}{۱۲}$ $\quad ۳\alpha^۲=\frac{۴}{۳}$ $\quad \Rightarrow \pm\frac{۲}{۳}=\frac{a}{۱۲}$

$\hookrightarrow \alpha=\pm\frac{۲}{۳}$ $\quad a=۱۲\times\frac{۲}{۳}=۸$

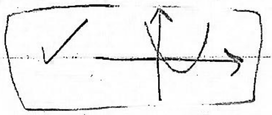
یا $-۸$

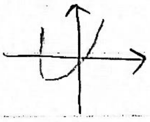
اختلاف ۲ مقدار a $=۸-(-۸)=\boxed{۱۶}$

---

-⑦

$y=ax^۲+(۳+۲a)x$



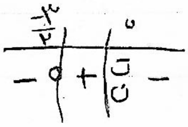


نباید از ناحیه سوم رد شود

$\boxed{a>۰}$ و این معادله یک ریشه صفر دارد

$y=-x \longrightarrow \boxed{a=۰}$

$\Longrightarrow \beta+\alpha=\frac{-b}{a}\geq ۰ \quad \frac{-۳-۲a}{a}\geq ۰$

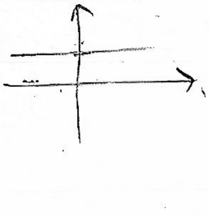


به ازای هیچ مقدار $\boxed{-\frac{۳}{۲}<a<۰}$

---

-⑧

$y=x^۲+ax-۲$ و $y=-x^۲-۲x+b$



محور تقارن $x_۱=\frac{-b}{۲a}=\frac{-a}{۲}$ و $x_۲=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

$\hookrightarrow \frac{-a}{۲}=-۱\rightarrow a=۲$

$x^۲+۲x-۲=۱\longrightarrow x^۲+۲x-۳=۰ \quad (x+۳)(x-۱)=۰ \begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases}$

$-x^۲-۲x+b \xrightarrow{x=۱} y=-۱-۲+b=b-۳$

$\xrightarrow{x=-۳} y=-۹+۶+b=b-۳$

$\rightarrow b-۳=۱\rightarrow b=۴$

$ab=۲\times۲=\boxed{۸}$

(۹)

$۲x^۲ - ax + b = ۰$ $\qquad$ $۲ax^۲ + ax - ۶$

$\beta + \frac{۱}{۲}$ و $\alpha + \frac{۱}{۲}$ $\qquad$ $\alpha + \beta = \frac{-a}{۲}$ $\qquad$ $\alpha\beta = \frac{-۶}{۲} = -۳$

$(\alpha + \frac{۱}{۲})(\beta + \frac{۱}{۲}) = \alpha + \beta + ۱ = \frac{a}{۲}$ $\qquad$ $\frac{-a}{۲} + ۱ = \frac{a}{۲} \longrightarrow ۲ = ۲a$

$\boxed{a = ۱}$

$(\alpha + \frac{۱}{۲})(\beta + \frac{۱}{۲}) = \alpha\beta + \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) + \frac{۱}{۴} = -۳ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = -۳ = \frac{b}{۲}$

$\hookrightarrow b = -۶$

$\left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{-۶}{۴}\right] = \boxed{-۲}$

---

(۱۰)

$x^۲ + ۶x + m = ۰$ و $x^۲ + ۲x - ۳m = ۰$

$x^۲ + ۶x + m - (x^۲ + ۲x - ۳m) = ۰$ $\qquad$ $۴x + ۴m = ۰$

$x + m = ۰ \rightarrow x = -m$

$x^۲ + ۶x - x = ۰$ $\qquad$ $x^۲ + ۵x = ۰$ $\qquad$ $x(x + ۵) = ۰ \longrightarrow x = -۵ \Rightarrow m = ۵$

$x^۲ + ۶x + ۵ = ۰$ $\qquad$ $(x + ۱)(x + ۵) = ۰$ $\qquad$ $x = -۱$ غیرمشترک ، $x = -۵$ مشترک

$x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰$ $\qquad$ $(x + ۵)(x - ۳) = ۰$ $\qquad$ $x = -۵$ مشترک ، $x = ۳$ غیرمشترک

$۳ - (-۱) = \boxed{۴}$