

۲۳، ۱۱، ۱۴۰۴

« بنام خدا »

برای حل تحلی

۱ فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سبی $y = ax^2 + bx + c$ کند بر نقطه $(3, 1)$ باشد، معادله سبی را بیابید.

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} = -1 &\rightarrow b = 2a \\ y = ax^2 + 2ax + c &\rightarrow \text{if } x = -1 \rightarrow a - 2a + c = 9 \\ 4a + 9a + c = 1 &\rightarrow 13a + c = 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} 13a + c = 1 \\ c = 9 + a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13a + 9 + a = 1 \\ 14a = -8 \\ a = -\frac{4}{7} \\ b = -\frac{8}{7} \\ c = 9 - \frac{4}{7} = \frac{59}{7} \end{cases}$$

$$y = -\frac{4}{7}x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{59}{7}$$

۲ معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 9 = 0$ دارای ریشه حقیقی است. بانه حقایق m را بیابید.

۲ ریشه مثبت

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow m^2 - 4m - 36 > 0 \rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \\ p > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+9}{2} > 0 \rightarrow m > -9 \\ S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \frac{-m}{2} > 0 \rightarrow m < 0 \end{cases}$$

$m < -4$ یا $m > 12$

$-9 < m < -4 \quad m \in [-9, -4]$

۳ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن ۲ ریشه برابر باشد، حقیق m را بیابید.

$$\Delta > 0 \rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{p} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc$$

$$9 = (1-2m)(2-m) \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 9 \rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \rightarrow m = -1, 3, 5$$

$m = -1 \rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0 \quad \times$

$m = 3, 5 \rightarrow 3x^2 + 5x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 25 + 12 > 0 \quad \checkmark$

۴ فرض کنید α_1, α_2 ریشه های معادله $x^2 - 4x = 0$ باشد، معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\alpha_1^3 + \frac{1}{\alpha_1}$ و $\alpha_2^3 + \frac{1}{\alpha_2}$ باشد.

$$x^2 - 4x + p = 0 \rightarrow x^2 - \left(\alpha_1^3 + \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2^3 + \frac{1}{\alpha_2}\right)x + \left(\alpha_1^3 + \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\alpha_2^3 + \frac{1}{\alpha_2}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(12 - \frac{1}{4}\right)x + (-55, 25) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^3 + \alpha_2^3 &= S^3 - 3PS = 1 - 3(1)(-4) = 13 \\ A &= \alpha_1^3 \alpha_2^3 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = -94 + 9 - \frac{1}{4} = -\frac{375}{4} \end{aligned}$$

۱۵) فرض کنید α_1, α_2 جوابهای معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار $\alpha_1 + \alpha_2$ را بیابید.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} \rightarrow (\sqrt[3]{x^2})^2 - 1 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = \textcircled{2}$$

۱۶) به ازای مقدار a ، یک ریشه حقیقی $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a را بیابید.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} = 3\alpha \times \alpha \rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{2}{3}, 3\alpha = 2 \rightarrow 12 - 2a + 4 = 0 \rightarrow 2a = 16 \rightarrow a = 8 \quad 8 - (-8) = \textcircled{16}$$

$$\rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}, 3\alpha = -2 \rightarrow 12 + 2a + 4 = 0 \rightarrow 2a = -16 \rightarrow a = -8$$

۱۷) به ازای چند مقدار a ، سعی $y = ax^2 + (2a+3)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد هیچ مقداری

۱) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3=0 \rightarrow a = -\frac{3}{2} / y = -\frac{3}{2}x^2$
 ۲) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۳) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۴) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۵) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۶) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۷) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۸) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۹) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۱۰) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۱۱) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۱۲) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۱۳) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۱۴) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۱۵) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۱۶) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۱۷) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۱۸) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$
 ۱۹) از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. $2a+3 < 0$
 ۲۰) از ناحیه ۳ می‌گذرد. $2a+3 > 0$

۱۸) محور تقاطع سعی های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از ۲ نقطه با عرض یکسان روی ۲ سعی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab را بیابید.

$$\text{محور تقاطع} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \rightarrow a = 2$$

$$ab = \textcircled{8}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 1 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \rightarrow x = 1, -3$$

$$\text{نقاط } (-3, 1), (1, 1) \text{ باید در معادله دوم صدق کنند.}$$

$$1 = -9 + 6 + b \rightarrow b = 4 \quad -1 - 2 + b = 1 \rightarrow b = 4$$

P', S'

P, S

۱۹) ریشه های $2x^2 - ax + b = 0$ نیم دایره از ریشه های معادله $2ax^2 + ax - 4 = 0$ بیشتر است. مقدار

$$\textcircled{1} S = \frac{-b}{a} = \frac{a}{2} \quad S' = \frac{a}{2} + 2x \cdot 0.5 = \frac{2+a}{2} = \frac{-a}{2} \rightarrow -2 = 4 + 2a \rightarrow a = -3$$

$$\textcircled{2} p = \frac{c}{a} = \frac{b}{2} \quad p' = (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + 1 \quad \left[\frac{ab}{4}\right] \text{ را بیابید.}$$

$$p' = \frac{b}{r} + \frac{a}{r} + 1 = \frac{r + 2b + a}{r} \rightarrow \frac{r + 2b + a}{r} = \frac{-9}{r} \rightarrow 2b + a = -14 \rightarrow 2b = -13$$

$$\rightarrow b = \frac{-13}{2}$$

$$\left[\frac{ab}{r} \right] = \left[\frac{-\frac{13}{2} \times -3}{r} \right] = \left[\frac{39}{2} \right] = \textcircled{K}$$

۱. محاسبه‌های $x^2 + 4x + m = 0$ ، $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌ها غیر مشترک نباید.

$$x^2 + 2x - 3m = x^2 + 4x + m \rightarrow 2x = -4m \rightarrow x = -2m$$

$$\rightarrow m^2 - 2m - 3m = 0 \rightarrow m^2 = 5m \xrightarrow{m \neq 0} m = 5$$

$$\textcircled{1} (x + 5)(x - 3) = 0 \rightarrow x = -5, 3$$

$$\textcircled{2} x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\textcircled{3} (x + 5)(x + 1) = 0 \rightarrow x = -5, -1$$

$$\text{اختلاف} = 3 - (-1) = \textcircled{K}$$