(۱) الف) $y = 2x^2 - 4x + 1$ ← نوع سهمی ← $a>0 \Rightarrow \min$ رو به پایین دهانه سهمی

$-\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$ ← طول رأس سهمی

مختصات رأس: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow (1, -1)$ ← جواب

جایگذاری برای به دست آوردن عرض رأس

$y = \frac{2(1)^2}{2} - \frac{4(1)}{-4} + 1 = 2 - 4 + 1 = \boxed{-1}$

ب) $y = -2x^2 + 3x - 5$

نوع سهمی $\Rightarrow a<0 \Rightarrow \max$ رو به بالا دهانه سهمی

$-\frac{b}{2a} = \frac{-3}{-4} = \boxed{\frac{3}{4}}$ ← طول رأس سهمی $\Rightarrow$ مختصات رأس $\left(\frac{3}{4}, -\frac{31}{8}\right)$

جایگذاری x رأس سهمی برای به دست آوردن عرض آن

$y = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right) - 5 \Rightarrow \underbrace{-\frac{9}{8}}_{-2\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \underbrace{\frac{9}{4}}_{3\left(\frac{3}{4}\right)} - 5 \Rightarrow \frac{-9 + 18 - 40}{8} = -\frac{31}{8}$

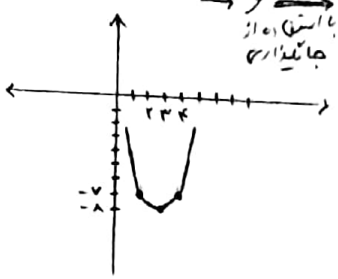
---

(۲) الف) $y = x^2 - 6x + 1$ ($a>0 \rightarrow \min$) ← مختصات رأس سهمی:

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ ← (۳) $\Rightarrow (3, -8)$

y با استفاده از جایگذاری $\Rightarrow 9 - 18 + 1 = -8$ (۸-)

x	۲	۳	۴
y	-۷	-۸	-۷

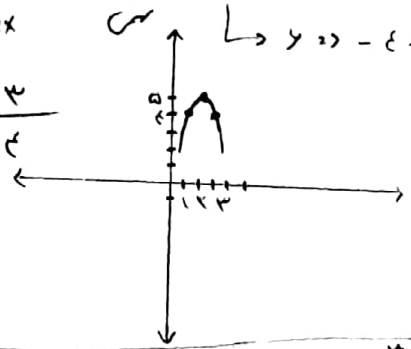


ب) $y = -x^2 + 4x + 1$ ($a<0 \rightarrow \max$) ← مختصات رأس سهمی:

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$ (۲) $\Rightarrow (2, 5)$

$y \Rightarrow -4 + 8 + 1 = 5$ (۵)

x	۱	۲	۳
y	۴	۵	۴



---

(۳) $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ معادله، ریشه‌های α, β

α, β, t = ریشه‌های معادله مکعبی

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = \alpha + \beta + t = -\frac{b}{a} = -\frac{k}{4} \\ \text{مجموع دوتایی‌ها} = \alpha\beta + \alpha t + \beta t = \frac{c}{a} = -\frac{9}{4} \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها} = \alpha\beta t = -\frac{d}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$k = ?$ ← $\alpha\beta = -2$, $\alpha + \beta = 1$

رابطه دوم $= \alpha\beta + t(\alpha+\beta) = -\frac{9}{4} \Rightarrow (-2) + t(1) = -\frac{9}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

رابطه اول $= \underbrace{\alpha+\beta}_{1} + \underbrace{t}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{k}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = -\frac{k}{4} \rightarrow \boxed{k = -3}$

(۴)

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 = 1^2$ $\quad \alpha+\beta = 3m$, $\alpha\beta = m$

$\frac{\alpha+\beta}{3m} - 2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{m}} = 1 \Rightarrow 3m-2m=1 \rightarrow \boxed{m=1} \Rightarrow 2x^2-3x-m=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2x^2-x-1=0$

جواب $= \frac{c}{a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ ضرب ریشه‌ها

---

(۵)

$y = 2x^2-(m+2)x+m$ از قطع سهمی با محور عرض‌ها $\xrightarrow{x=0} \boxed{y=m}$ نقطه برخورد

$\frac{c}{a} = \frac{m}{2}$, $\frac{-b}{a} = \frac{m+2}{2}$

مساحت مثلث $\Rightarrow \frac{m \times \frac{m-2}{2}}{2} = \frac{m^2-2m}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4m^2-8m-12=0$

$(2m-6)(2m+2)=0$ ⇐ $\boxed{m=3}$, $\boxed{m=-1}$

طول از مبدأ سهمی: $m=3 \Rightarrow \frac{3}{2}$, $m=-1 \Rightarrow \frac{-1}{2}$

تفاضل $= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(m+2)^2-4(2)(m)}}{2} = \frac{\sqrt{(m-2)^2}}{2} = \frac{m-2}{2}$

---

(۶)

$y = ax^2+3x+a$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2a}$ ← فاصله بین ۲ ریشه = فاصله مثلث

$y = a(-\frac{3}{2a})^2+3(-\frac{3}{2a})+a = a-\frac{9}{4a} \Rightarrow a-\frac{9}{4a}=\frac{7}{8} \Rightarrow 4a^2-\frac{7a}{2}-9=0 \xrightarrow{\times 2} 8a^2-7a-18=0$

$\Delta = (-7)^2-4(8)(-18) = 25^2$ $\quad a = \frac{32}{16} = 2 \rightarrow \boxed{a=2}$ ✓ $\quad a = \frac{-18}{16} = -\frac{9}{8}$ قبول نیست

جواب = برازای کدام مقدار a، چولی دامنه مشخص نیست ← کمترین مقدار کمی $\frac{7}{8}$

---

(۷)

$x^2-(a+1)x+a=0$ ریشه‌های طبیعی $\Rightarrow 2n+1, 2n+3$ ← جمع ریشه‌ها $\Rightarrow a = 4n+3$

ضرب ریشه‌ها $\Rightarrow a = 4n^2+8n+3$ $\quad 4n+3 = 4n^2+8n+3$

$4n^2+4n=0 \Rightarrow n(n+1)=0$ ✓ $n=0$, $n=-1$ غ ق ق

$\Rightarrow a = 4n+3 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$x^2-(3a+1)x+b=0$ ریشه‌های طبیعی $\Rightarrow 2m, 2m+2$

جمع ریشه‌ها $\Rightarrow 4m+2 = 3a+1 \Rightarrow a=2$ زوج ✓ $\quad \boxed{m=2}$

ضرب ریشه‌ها $\Rightarrow 4m^2+4m=b \Rightarrow m=2 \rightarrow \boxed{b=24}$

اختلاف حاصل ضرب ریشه‌ها $\Leftarrow b-a$ $\quad 24-3 = \boxed{21}$ جواب

---

(۸)

$y = -ax^2+ax+2$ ← محل برخورد با y ← $y = 12x^2-12x+2$ ← محل برخورد با x ← $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2(-a)} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{a+8}{4} = 2b(\frac{1}{2})^2-b(\frac{1}{2})-1 = \frac{b}{2}-\frac{b}{2}-1 = -1 \Rightarrow \boxed{a=-12}$ ← جایگذاری در معادله ۲

$y = 2bx^2-bx-1$ ← محل برخورد با x ← $x = \frac{-b}{2a} = \frac{b}{4b} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$y = \frac{-b-8}{8}$ ← جایگذاری در معادله ۱

$-\frac{b-8}{8} = \frac{3}{4}-3+1 \rightarrow \boxed{b=-4} \Rightarrow b-a = -4+12 = \boxed{8}$ جواب

---

(۹)

$y = 2\sqrt{3}ax^2+4x+\beta$ ← تشابه معادله $\Rightarrow y = -\sqrt{3}x^2+4x+1$ ← محل برخورد با x ← $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{4}{10}$ $\quad \beta > a$

$y = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

$\alpha+\beta = -\frac{4}{2\sqrt{3}a} \xrightarrow{a=-\frac{1}{\sqrt{3}}} \beta = +\frac{4}{3}+\frac{1}{3} = \boxed{1}$

$\alpha\beta = \frac{\beta}{2\sqrt{3}a} \xrightarrow{\text{هر دو طرف } \times 2\sqrt{3}a} \beta(2\sqrt{3}a^2-1)=0 \rightarrow 2\sqrt{3}a^2-1=0 \rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{a<\beta} \boxed{a=-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

محل برخورد سهمی در ناحیه اول صفحه مختصات است.

---

(۱۰)

$x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ $\quad \frac{a+b}{5} = a^2+b^2-12 \Rightarrow S = a^2+b^2-12$ $\quad a+b=?$

$\alpha\beta = a+b-1 \Rightarrow P = a+b-1 \Rightarrow \boxed{P=S-1}$

$(a+b)^2-2ab \Rightarrow S^2-1P-11=0$

$2(S-1) = S^2-S-12$ ← جایگذاری P ← $2P = S^2-S-12$

$2S-2 = S^2-S-12 \Rightarrow S^2-3S-10=0$ $\quad \Delta = 49$ $\quad S=5$ ✓ $\quad S=-2$ غ ق ق ← ابعاد مثبت

$P=4$ $\quad S=a+b=5$ جواب