زهرا دهقانی — دهم دختران A — تکالیف شماره ۲۴

۱

الف) $y = 2x^2 - 4x + 1$

رأس سهمی $\rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \\ y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1 \end{cases}$

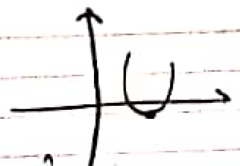
رأس سهمی $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

نوع اکسترمم $\downarrow$

$a > 0$

پس اکسترمم کمینه min دارد

سهمی رو به بالا است



به عنوان مثال، ولی در این شکل سهمی این سوال نیست

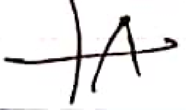
ب) $y = -2x^2 + 3x - 5$ رأس سهمی $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \\ y = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right) - 5 = -\frac{31}{8} \end{cases}$

رأس سهمی $\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{31}{8} \end{bmatrix}$

نوع اکسترمم $\downarrow$

$a < 0$

اکسترمم بیشینه max دار



به عنوان مثال ولی نه این شکل سهمی این سوال نیست

سهمی رو به پایین است

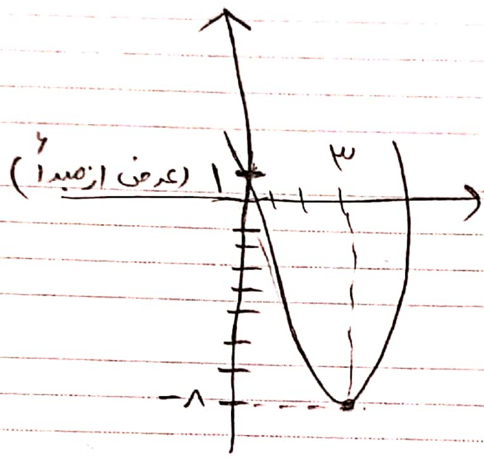
Subject :

۲

الف) $y = x^۲ - ۴x + ۱$ $\quad a > ۰ \rightarrow$ min دارد

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{۲a} = \dfrac{۴}{۲} = ۳ \\ y = (۳)^۲ - ۴(۳) + ۱ = -۸ \end{cases}$$

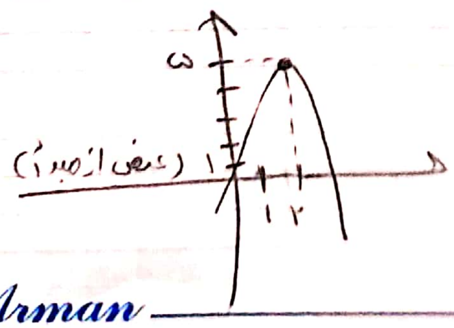
$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ \\ -۸ \end{bmatrix}$ عرض از مبدا $\Rightarrow c = +۱$



ب) $y = -x^۲ + ۴x + ۱$ $\quad a < ۰$ max دارد

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{۲a} = \dfrac{-۴}{-۲} = ۲ \\ y = -(۲)^۲ + ۴(۲) + ۱ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

عرض از مبدا $\Rightarrow c = +۱$



Arman

Subject :

$\alpha+\beta=1 \qquad \alpha\beta=-2$ ۳

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = \dfrac{-(-2)}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha\beta = -2 \\ -2\gamma = \dfrac{1}{2} \rightarrow \gamma = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ریشه سوم را γ میگیریم

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{b}{a} \rightarrow -\dfrac{k}{4} \\ 1+\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{k}{4} = \dfrac{3}{4} \rightarrow \boxed{k=-3} \end{cases}$$

جواب

۴

$x^2-3mx+m=0$

$\alpha\beta=m \qquad \alpha+\beta=3m$

$|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=1$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$

$1=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$

$1=3m-2\sqrt{m}$

$t = \sqrt{m} \rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$ ~~غ ق ق~~

۴ ادامه

$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad t = \frac{2 \pm 4}{6}$ $\rightarrow t = \frac{-1}{3}$ غ ق ق ، $\rightarrow t = 1$ ق ق

$\xrightarrow{\text{بنابراین}} \boxed{m = 1}$

$2x^2 - mx - m = 0$

$\frac{c}{a} = -\frac{m}{2} \xrightarrow{m=1}$ جواب $-\frac{1}{2}$

---

۵ ریشه‌های سهمی اول $(r_1, 0)$ و $(r_2, 0)$

عرض از مبدا: $(0, m)$

مساحت: $A = \frac{1}{2}|r_1 - r_2||m| = \frac{3}{4}$

$y = 2x^2 - (m+2)x + m$

$\Delta = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2$

$|r_1 - r_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{|m-2|}{2}$

$\frac{1}{2} \times \frac{|m-2|}{2} \times |m| = \frac{3}{4}$

$|m(m-2)| = 3 \quad m(m-2) = \pm 3$

حالت‌ها: $m^2-2m-3=0 \to m=3 , 1$

$m^2-2m+3=0$ (بدون جواب حقیقی)

پس: $m=-1$ یا $m=3$

رأس سهمی دوم: $y=x^2-mx+1$

مختصات رأس: $x_0=\frac{m}{2}$, $y_0=1-\frac{m^2}{4}$

مقادیر ممکن طول رأس:

اگر $m=3$

$y_0=1-\frac{9}{4}=\boxed{-\frac{5}{4}}$

جواب

اگر $m=-1$

$y_0=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Subject :

۶

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2a}$$

$$y_{min} = a\left(\frac{9}{4a^2}\right) + 3\left(\frac{-3}{2a}\right) + a = a - \frac{9}{4a}$$

بنابر شرط سوال:

$$a - \frac{9}{4a} = \frac{7}{8}$$

$$18a^2 - 18 = 7a$$

$$18a^2 - 18 - 7a = 0$$

$$\Delta = 49 + 576 = 625$$

$a = 2$ یا $a = -\frac{9}{8}$

برای داشتن مقدار کمینه سهمی باید $a>0$ باشد (سهمی رو به بالا)

پس فقط $\boxed{a=2}$ قابل قبول است

پاسخ ← فقط یک مقدار

$$x^2-(a+1)x+a=0$$

مجموع ریشه‌ها: $S = n+(n+2) = 2n+2 = a+1$

$$n(n+2)=a$$

$$a=2n+1$$

$$2n+1=n(n+2)=n^2+2n$$

$$a=3$$

$$P_{\text{معادله اول}} = a = 3$$

$$x^2-(3a+1)x+b=0$$

با $a=3$:

$$x^2-10x+b=0$$

ریشه‌ها ۲ عدد زوج متوالی هستند ← $2k+2 , 2k$

مجموع: $2k+(2k+2)=4k+2=10$

$$4k=8 \to k=2$$

پس ریشه‌ها: $6 , 4$

$$P_{\text{معادله دوم}} = 4\times 6 = 24$$

حاصلضرب

اختلاف P ریشه‌ها

$$P_{\text{معادله دوم}} - P_{\text{معادله اول}} = 24-3 = \boxed{21}$$

Arman

Subject:

$$y=-ax^2+ax+2$$

مختصات رأس:

$$\begin{cases} x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-a}{2(-a)}=\frac{1}{2} \\ y_0=-a\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{a}{4}+2 \end{cases}$$

$$y=2b\times\frac{1}{4}-b\times\frac{1}{2}-1=-1$$

$$\frac{4}{a}+2=-1 \longrightarrow a=-12$$

$$y=2bx^2-bx-1$$

مختصات رأس:

$$\begin{cases} x_0=\frac{-b}{2a} \longrightarrow \frac{-(-b)}{2(2b}=\frac{1}{4} \\ y_0=2b\left(\frac{1}{4}\right)^2-b\left(\frac{1}{4}\right)-1=\frac{-b}{8}-1 \end{cases}$$

$$y=-(-12)\frac{1}{16}+(-12)\frac{1}{4}+2=$$

$$=\frac{3}{4}-3+2=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{-b}{8}-1=-\frac{1}{4} \Rightarrow b=-6$$

$$b-a=\boxed{(-6)-(-12)=6}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-۴}{۲۵\alpha}$$

$$\alpha\beta = \frac{\beta}{۲۵\alpha}$$

اما $\beta \neq ۰$ پس

$$\alpha = \frac{۱}{۲۵\alpha} \Rightarrow ۲۵\alpha^۲ = ۱ \rightarrow \alpha = \pm \frac{۱}{۵}$$

پس $\beta > \alpha$

$$\beta = ۱ \,،\, \alpha = -\frac{۱}{۵}$$

$$y = -۵x^۲ + ۴x + ۱$$

مختصات راس:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲}{۵} > ۰ \\ y_0 = -۵ \times \frac{۴}{۲۵} + \frac{۸}{۵} + ۱ = -\frac{۴}{۵} + ۱ = \frac{۹}{۵} > ۰ \end{cases}$$

جواب: ناحیه اول

فرض می کنیم k و r ریشه های معادله باشند $\quad k + r = a^2 + b^2 - 1$ ۱۵

$$kr = a + b - 1$$

$$a + b = rk + 1$$

اگر $a = b = 2$

$$a + b = 4 \to a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$$

پس معادله می شود:

$$x^2 - (8 - 12)x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

ریشه ها: $x = -1$ و -3 طبیعی نیست ×

چند مقدار طبیعی که چک برای a و b امتحان می کنیم:

اگر $a = b = 3$

$$a + b = 6$$

$$a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$$

پس معادله می شود:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

ریشه ها: $x = 1$ و 5 هر دو طبیعی اند

پس مقدار درست:

$$a + b = 6$$

Arman