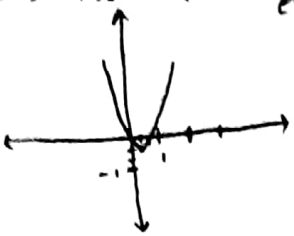
(۱) الف) $y = 2x^2 - 2x$, $a > 0$: min

رأس‌ها: $x_1 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $x_2 = \frac{2-2}{4} = \frac{0}{4} = 0$

مختصات رأس: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، جایگذاری در y: $y = 2(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

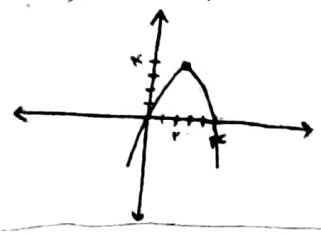


از ناحیه سوم ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

ب) $y = -x^2 + 4x$, $a < 0$: max

مختصات رأس: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$ ، جایگذاری در y: $y = -(2)^2 + 4(2) = 4$

رأس‌ها: $\Delta = 16$ ، $x_1 = \frac{-4+4}{-2} = 0$ ، $x_2 = \frac{-4-4}{-2} = 4$



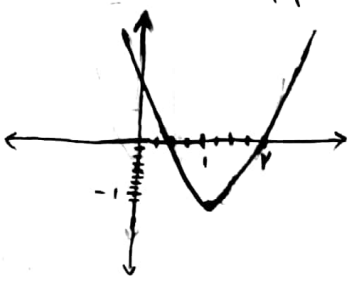
از ناحیه دوم ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

---

(۲) الف) $y = 2x^2 - 3x + 2$, $a > 0$: min

مختصات رأس: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$ ، جایگذاری در y: $y = 2(\frac{3}{4})^2 - 3(\frac{3}{4}) + 2 = \frac{9}{8}$

$\Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7$



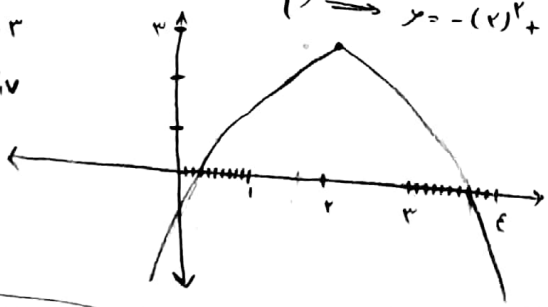
از ناحیه ۱ و ۲ و ۴ ناحیه مختصاتی می‌گذرد.

ب) $y = -x^2 + 4x - 1$, $a < 0$: max

مختصات رأس: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$ ، جایگذاری در y: $y = -(2)^2 + 4(2) - 1 = 3$

$\Delta = 16 - 4(1)(-1) = 16 + 4 = 20$

رأس‌ها: $x_1 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5} \approx 0.3$ ، $x_2 = \frac{-4-2\sqrt{5}}{-2} = 2 + \sqrt{5} \approx 4.2$



از ناحیه ۱ و ۳ و ۴ ناحیه مختصاتی می‌گذرد.

---

(۳) معادله: $x^2 - x - 3 = 0$ ، ریشه‌های معادله α, β ، $\alpha + \beta = 1$ ، $\alpha\beta = -3$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4(1)(-3)}}{1} = \sqrt{13}$

ب) $\alpha^2 + \beta^2 = (\underbrace{\alpha+\beta}_{1})^2 - 2\underbrace{\alpha\beta}_{-3} = 1^2 - 2(-3) = 1 + 6 = 7$

ج) $\alpha^3 + \beta^3 = (\underbrace{\alpha+\beta}_{1})(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{7} - \underbrace{\alpha\beta}_{-3}) = 1 \times 7 - (-3) = 10$

د) $\alpha^4 - \beta^4 = (\underbrace{\alpha-\beta}_{\sqrt{13}})(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{7} + \underbrace{\alpha\beta}_{-3}) = \sqrt{13} \times 4 = 4\sqrt{13}$

---

(۴) ۱۸۱۷۵

$y = (x-2)(x^2 - ax + a) \rightarrow (x-2)(x^2 - ax + a) = 0 \rightarrow x = 2$

$a^2 - 4(1)(a) < 0 \rightsquigarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a-4) < 0 \Rightarrow (0, 4)$

$\Delta = 0 \quad (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow a = 4$

$a \in (0, 4]$

$I \cup II = (0, 4]$

۵) $3x^2-12x-a=0$, $2\alpha^2+\beta^2-6\alpha=7$ — a ریشه برابر معادله

$\alpha+\beta=4 \to \beta=4-\alpha$

$\alpha\beta=-\frac{a}{3}$

$2\alpha^2+(4-\alpha)^2-6\alpha=7$

$2\alpha^2+(\alpha^2-8\alpha+16)-6\alpha=7$

$3\alpha^2-14\alpha+16=7 \to \alpha^2-6\alpha+3=0$ ⟨ $\alpha=1 \to$ if $a=1 \to \beta=3$; $\alpha=3 \to$ if $a=3 \to \beta=1$ (طبق رابطه ⊥)

$a=-9$ ریشه برابر ؟ $\Rightarrow 3 \Longrightarrow \frac{-9}{3}=\boxed{-3}$ جواب

۶) $(3,5)$ — مختصات رأس سهمی $\to$ عرض رأس سهمی $=6-2=3$ — طول رأس سهمی $=\frac{7-2a+2a+3}{2}=5$ — وقتی نقطه برابر

$a-2>0 \to a>2$, $7-2a>0 \to a<3.5$, $2a+3>0 \to a=-1,5$ $\Longrightarrow$ I∩II∩III

$a=3$ ⟸ تنها عدد طبیعی — $(2,3,5)$ ⟸ تنها عددی که در این بازه وجود دارد

نقاط: $(1,1)$, $(9,1)$ — معادله $\Rightarrow y=a(x-5)^2+3 \to 0=a(-4)^2+3 \Rightarrow y=-\frac{1}{8}(x-5)^2+3 \Rightarrow y=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}+\frac{10}{8}x$

$\xrightarrow{x-4} y=x^2+1+10x \Longrightarrow$ جواب $\boxed{1}$ ⟸ عرض از مبدأ = جواب معادله

۷) $ax^2-9x-b=0$, $6\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17 \Rightarrow 60\alpha^2-60\alpha+3=0$

$\alpha^2-\alpha+\frac{1}{20}=0 \Rightarrow \Delta=1-4(1)(\frac{1}{4})=\frac{4}{5}$

اتصاف ریشه‌های معادله ؟ — $\alpha+\beta=1 \to \beta=1-\alpha$ — $\alpha\beta=\frac{-b}{a}$

تفاضل $\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ — $\boxed{a=1}$

۸) $(1,\beta)$, $(-3,\beta)$ — رأس سهمی $=-\frac{1}{2}$ — عرض از مبدأ = عرض نقطه $\frac{3}{2}$

$\beta=?$

$y=a(x-h)^2+k \to y=a(x+2)^2-\frac{1}{2}$ — جایگذاری $(0,\frac{3}{2})$

$\frac{3}{2}=a(2)^2-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}=4a-\frac{1}{2} \to \boxed{a=\frac{1}{2}}$ — معادله $\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1}{2}$

جایگذاری $(1,\beta) \to \beta=\frac{1}{2}(1+2)^2-\frac{1}{2} \to \beta=\frac{8}{2}=4$

جایگذاری $(-5,\beta) \to \beta=\frac{1}{2}(-5+2)^2-\frac{1}{2} \to \beta=4$ ✗

$\Rightarrow \boxed{\beta=4}$ جواب

عرض نقاط روی سهمی برابر است بنابراین: رأس سهمی $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-5+1}{2}=\boxed{-2}$

۹) $x^2+4x+a=0$ — $a<\beta<0$ — $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+18$

$a=?$

$\Delta=16-4a$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4a}}{2} \to \alpha<\beta$ ⟨ $\alpha=-2-\sqrt{4-a}$; $\beta=-2+\sqrt{4-a}$

$3\alpha^2+2\beta^2=3(-2-\sqrt{4-a})^2+2(-2+\sqrt{4-a})^2=3(4-4-a+4\sqrt{4-a})+2(4+4-a-4\sqrt{4-a})$

$12-3a+12\sqrt{4-a}+8-2a-8\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}+18$

$20-5a+4\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}+18 \Rightarrow 2-5a=12\sqrt{2}-4\sqrt{4-a}$

$4\sqrt{4-a}=7\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{a=1}$ جواب

۱۰) $3x^2-(m+11)x+1=0$, $mx^2+2mx+2=0$ — جایگذاری m — $-x^2+3x+2=0 \Rightarrow$ حاصل ضرب ریشه‌ها $=-2$ — جواب

$\left(\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)^2=5^2$ $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+2\sqrt{\frac{1}{a\beta}}=25$ — $\frac{1}{a\beta}=\frac{1}{24}$

$\frac{a+\beta}{a\beta}=13 \to m+14=13 \to \boxed{m=-1}$