(۱) $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(3)(0) = 16$ ریشه‌ها:

$x_1 = \frac{4+4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

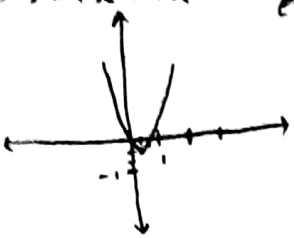
$x_2 = \frac{4-4}{6} = \frac{0}{6} = 0$

از ناحیه سوم ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

الف) $y = 3x^2 - 4x$ $a > 0$ min

مختصات ext: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

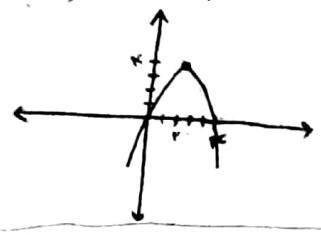
جایگذاری $\Rightarrow y = 3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$



ب) $y = -x^2 + 4x$ $a < 0$ max

مختصات ext: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$

جایگذاری $\Rightarrow y = -(2)^2 + 4(2) = 4$



ریشه‌ها: $\Delta = 16$

$x_1 = \frac{-4+4}{-2} = 0$

$x_2 = \frac{-4-4}{-2} = 4$

از ناحیه دوم ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

---

(۲) $\Delta = 25 - 4(2)(2) = 9$ ریشه‌ها:

$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

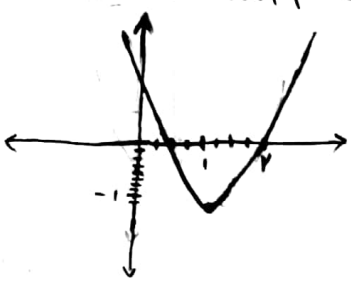
$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

از ناحیه ۱ و ۲ و ۴ ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

الف) $y = 2x^2 - 5x + 2$ $a > 0$ min

مختصات ext: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$

جایگذاری $\Rightarrow y = 2(\frac{5}{4})^2 - 5(\frac{5}{4}) + 2 = -\frac{9}{8}$



ب) $y = -x^2 + 4x - 1$ $a < 0$ max

مختصات ext: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$

جایگذاری $\Rightarrow y = -(2)^2 + 4(2) - 1 = 3$

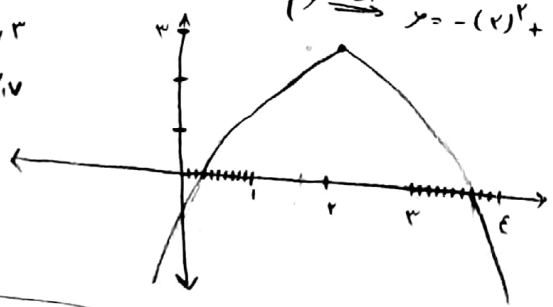
ریشه‌ها: $\Delta = 16 - 4(-1)(-1) = 12 \rightarrow 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{-2} = 2 + \sqrt{3}$

$x_1 = 0.3$

$x_2 = 3.7$



از ناحیه ۱ و ۳ و ۴ ناحیه مختصاتی عبور نمی‌کند.

---

(۳) معادله $\Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$

ریشه‌های معادله α, β $\quad \alpha + \beta = 1 \quad , \quad \alpha\beta = -3$

$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4(1)(-3)}}{1} = \sqrt{13}$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

ب) $\alpha^2 + \beta^2 = (\underbrace{\alpha+\beta}_{1})^2 - 2\underbrace{\alpha\beta}_{-3} = 1^2 - 2(-3) = 1 + 6 = 7$

ج) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{7} - \underbrace{\alpha\beta}_{-3}) = 1 \times 7 - (-3) = 10$

د) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{7} + \underbrace{\alpha\beta}_{-3}) = \sqrt{13} \times 4 = 4\sqrt{13}$

---

(۴) $y = (x-2)(x^2 - ax + a) \Rightarrow (x-2)(x^2 - ax + a) = 0 \rightarrow x = +2$

$a \in (0, 4)$

$a^2 - 4(1)(a) < 0 \rightsquigarrow a^2 - 4a < 0 \quad a(a-4) < 0 \Rightarrow (0, 4)$

(۵)

$3x^2-12x-a=0$, $2\alpha^2+\beta^2-6\alpha=7$ — a: ریشه برابر معادله

$\alpha+\beta=4 \to \beta=4-\alpha$

$\alpha\beta=-\frac{a}{3}$

$2\alpha^2+(4-\alpha)^2-6\alpha=7$

$2\alpha^2+(\alpha^2-8\alpha+16)-6\alpha=7$

$3\alpha^2-14\alpha+16=7 \to \alpha^2-6\alpha+3=0$ ⟵ طبق رابطه ۱

$\alpha=1 \to$ if $a=1 \to \beta=3$

$\alpha=3 \to$ if $a=3 \to \beta=1$

$a=-9$

ریشه بزرگتر $\Rightarrow 3 \Longrightarrow \frac{-9}{3}=\boxed{-3}$ جواب

(۶)

$(3,5)$ ⟵ مختصات رأس

عرض رأس $= b-2=3 \to$ عرض رأس

طول رأس $= \frac{7-2a+2a+3}{2}=5$

ضرب دو نقطه برابر $\Rightarrow$

$a-2>0 \to a>2$, $7-2a>0 \to a<3.5$, $2a+3>0 \to a=-1.5$ $\xrightarrow{I \cap II \cap III}$ $(2,3.5)$ ⟵ تنها عدد صحیحی که در این بازه وجود دارد $a=3$ ⟵ $\frac{3}{2}$

نقاط: $(1,1)$, $(9,1)$

معادله $\Rightarrow y=a(x-5)^2+3 \to 0=\frac{1}{8}(x-5)^2+3 \Rightarrow y=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}+\frac{10}{8}x$

$\xrightarrow{x-4} y=x^2+1+10x \Longrightarrow$ جواب $\boxed{1} \Rightarrow$ عرض از مبدأ معادله

(۷)

$ax^2-9x-b=0$, $4\beta^2+20a^2-20\beta=17 \Rightarrow 40a^2-40a+3=0$

$a^2-a+\frac{1}{20}=0 \Rightarrow \Delta=1-4(1)(\frac{1}{4})=\frac{4}{5}$

$a=1$

اختلاف ریشه‌های معادله؟

$\alpha+\beta=1 \to \beta=1-\alpha$

$\alpha\beta=\frac{-b}{a}$

تفاضل $\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

(۸)

$(1,\beta)$, $(-3,\beta)$ و رأس سهمی $=-\frac{1}{2}$ و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه $\frac{3}{2}$ = عرض از مبدأ قطع می‌کند

$\beta=?$

عرض نقاطی دو نقطه واقع بر سهمی برابر است بنابراین: $x_{\text{رأس}}=\frac{-3+1}{2}=\boxed{-2}$

$y=a(x-h)^2+k \to y=a(x+2)^2-\frac{1}{2}$

جایگذاری $(0,\frac{3}{2})$ $\Rightarrow \frac{3}{2}=a(2)^2-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}=4a-\frac{1}{2} \to \boxed{a=\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ معادله $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1}{2}$

جایگذاری $(1,\beta)$ $\to \beta=\frac{1}{2}(1+2)^2-\frac{1}{2} \to \beta=\frac{8}{2}=4$

جایگذاری $(-5,\beta)$ $\to \beta=\frac{1}{2}(-5+2)^2-\frac{1}{2} \to \beta=4$ ✓

$\Rightarrow \boxed{\beta=4}$ جواب

(۹)

$x^2+4x+a=0$, $a<\beta<0$, $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+18$

$\Delta=16-4a$

$a=?$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4a}}{2} \to \alpha<\beta$ $\begin{cases}\alpha=-2-\sqrt{4-a}\\ \beta=-2+\sqrt{4-a}\end{cases}$

$3\alpha^2+2\beta^2=3(-2-\sqrt{4-a})^2+2(-2+\sqrt{4-a})^2=3(4-4-a+4\sqrt{4-a})+2(4+4-a-4\sqrt{4-a})$

$12+12-3a+4\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}+18 \Rightarrow 24-3a+4\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}+18$

$4\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}-6+3a$

$2\sqrt{4-a}=6\sqrt{2}-3+\frac{3}{2}a$

$4-a=72+9+\frac{9}{4}a^2-36\sqrt{2}+9a-18a$

$\frac{13}{4}a^2-36\sqrt{2}+18a+77=0$

$\Delta=(18)^2-4(\frac{13}{4})(77-36\sqrt{2})=324-1001+468\sqrt{2}=-677+468\sqrt{2}>0$ ✓

$a=\frac{-18\pm\sqrt{-677+468\sqrt{2}}}{\frac{13}{2}}$

$a=1$ جواب

(۱۰)

$9x^2-(m+11)x+1=0$, $mx^2+3x+2=0$ جایگذاری m $\to -x^2+3x+2=0$ $\Rightarrow$ حاصل ضرب ریشه‌ها $=-2$ جواب

$\left(\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)^2=5^2$ $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+2\sqrt{\frac{1}{a\beta}}=25$

$\frac{a+\beta}{a\beta}=13 \to m+14=13 \to \boxed{m=-1}$