۱) از اول و دوم و چهارم می‌گذرد ✓ — از ناصیه‌ی سوم نمی‌گذرد — ۱۵

$Min \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = +\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} \end{cases}$

الف) $y = 12x^2 - 2x$

$x(12x - 2) = 0$ → $x = 0$ ، $x = \frac{2}{12}$

$a > 0 \rightarrow Min \cup$

ب) $y = -x^2 + 8x$

$x(-x + 8) = 0$ → $x = 0$ ، $x = 8$

$a < 0 \rightarrow Max \cap$

$Max \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2} = +4 \\ 8 \end{cases}$

از ناصیه‌ی اول و سوم و چهارم می‌گذرد — از ناصیه‌ی دوم نمی‌گذرد

شکل هندسی باید کشیده شود

۲) از ناصیه‌های اول و دوم و چهارم می‌گذرد ✓ — از ناصیه‌ی سوم نمی‌گذرد — ۱۵

$Min \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4} \checkmark \\ -\frac{9}{8} \checkmark \end{cases}$ (ناصیه‌ی چهارم)

الف) $y = 4x^2 - 5x + 2$

$\Delta = 25 - \underbrace{4(4)(2)}_{16} = 9$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$ → $x = 2$ ، $x = \frac{1}{2}$

ب) $-x^2 + 4x - 1$

$\Delta = 16 - \underbrace{4(-1)(-1)}_{4} = 12$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$ → $x = \oplus 0/27 \rightarrow$ تقریبی ، $x = \oplus 3/73 \rightarrow$ تقریبی

$Max \begin{cases} -\frac{4}{-2} = 2 \\ 3 \end{cases}$ (ناصیه‌ی اول)

از ناصیه‌های اول و سوم و چهارم می‌گذرد — از ناصیه‌ی دوم نمی‌گذرد

در این سوال هم باید شکل رسم شده شود

۳) ۱۱۵ ✓

$x^2 - x - 3 = 0$

الف) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = ?$ ، $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = +1$ ، $\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \rightarrow = \frac{\sqrt{13}}{1}$ ⇒ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ✓

ب) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \rightarrow (1)^2 - \underbrace{2(-3)}_{-6} = 7$ ✓

ج) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (1)^3 - \underbrace{3(-3)(1)}_{-9} = 10$

د) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^3 + 3\left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{169} - \frac{9\sqrt{13}}{13 \times 13} = \frac{13\sqrt{13} - 117\sqrt{13}}{169} = -\frac{104\sqrt{13}}{169}$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$

$(\sqrt{13})(7 - 3) = 4\sqrt{13}$

۴) $y = 0$ ها را در یک نقطه قطع کند

$x^2 - ax + 4 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a - 4) < 0$

	0		4	
	+	−		+

$0 < a < 4$ ✓ — ۱۷/۵

مقعر رو به بالا باشد

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$a = 4$ ✗

$I \cap \overline{II} = (0, 4)$

۵)

$3x^2 - 12x - a = 0$

$\alpha + \beta = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \beta = 4 - \alpha$

$\alpha\beta = \frac{-a}{3}$

$\alpha\beta = 1 \times 3 = 3 \rightarrow -\frac{a}{3} = 3$ (−a)

$\frac{a}{\text{ریشه‌ی بزرگ‌تر}} = \frac{-9}{3} = -3$

$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$

$2\alpha^2 + (4-\alpha)^2 - 4\alpha = 7$ ($16 + \alpha^2 - 8\alpha$)

$3\alpha^2 - 12\alpha + 16 = 7$

$3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0$ ($\Delta = 12^2$)

$(\alpha - 3)(\alpha - 9)$ ($\frac{3}{3} = 1$, $\frac{9}{3} = 3$)

۴

۶)

$A(2a+3, a-2)$

$B(7-2a, a-2)$

$S(b, b-2)$

$b = a$

$S(a, a-2)$

$x_S = \frac{2a+3+7-2a}{2} = a$ (b)

وسط پاره‌خط AB

$a - 2 \geq 1 \rightarrow a \geq 3$

$2a + 3 \neq 7 - 2a$

$4a \neq 4$

$a \neq 1$

پس $a = 3$

$A(9, 1)$

$B(1, 1)$

چون نسبت به $x = a$ متقارن است

$y = k(x-a)^2 + 3$

$1 = 16k + 3$

$-2 = 16k$

$k = -\frac{1}{8}$

$y = -\frac{1}{8}(x-a)^2 + 3$

$y = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$ ($x = 0$ برخورد با محور عرض‌ها)

$-\frac{25}{8} + \frac{24}{8} + 3 = -\frac{1}{8}$

فاصله = $\sqrt{5^2 + (-\frac{1}{8})^2} = \frac{1}{8}$

۲

۷)

$ax^2 - ax - b = 0$

$\alpha + \beta = -\frac{-a}{a} = +1 \rightarrow \beta = 1 - \alpha$

$4\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$

$4(1-\alpha)^2 + 20\alpha^2 - 20(1-\alpha) = 17$

$1 + \alpha^2 - 2\alpha$; $4 + 4\alpha^2 - 8\alpha$; -20α ; $20 - 20\alpha$

$20\alpha^2 - 20\alpha + 4 = 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{5} = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$

$|\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

۲

۸)

$(-a, \beta)$; $(1, \beta)$ $\quad y = a(x+2)^2 - \frac{1}{2}$

$x_S = \frac{1 + (-4)}{2} = -2$ (طول رأس سهمی)

تقارن یا دو عرض $\frac{3}{2}$ قطع کند $x = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = a(0+2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = 4a - \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = 4a$

$a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{x=1}$ $\beta = \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{2} \rightarrow \beta = \frac{8}{2} = 4$

$x^2+4x+a=0$

$\alpha+\beta=-4$

$\alpha\beta=a$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4a}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{4-a}}{2}=-2\pm\sqrt{4-a}$ ← $16-4a=4(4-a)$

$\Rightarrow \alpha=-2-\sqrt{4-a}$

$\beta=-2+\sqrt{4-a}$ ✓ $\alpha<\beta<0$

$2\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+18$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$(-4)^2-2a=16-2a$

$\Rightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+\alpha^2=2(16-2a)+\alpha^2$

$32-4a+\alpha^2=12\sqrt{2}+18$

$\alpha^2=(-2-\sqrt{4-a})^2=\frac{4+4-a+4\sqrt{4-a}}{18}$

$32-4a+18-a+4\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}+18$

$5-5a+\frac{1}{4}\sqrt{4-a}=12\sqrt{2}$

$a=1$ ✓ $\Rightarrow 4\sqrt{4-a}=5a-5+12\sqrt{2}$

$(\sqrt{4-a})^2=(\frac{5a-5}{4}+2\sqrt{2})^2$

$4-a=\frac{(5a-5)^2}{16}+8+\frac{2(5a-5)}{4}\sqrt{2}$

(1)

---

(10)

$3x^2-(m+14)x+1=0$

مجموع جذرهای مکوس وارونشان $\rightarrow \sqrt{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}=5$

$\alpha+\beta=\frac{m+14}{3}$

$\alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}=5\rightarrow 4(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})=5$

$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

$\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}=\frac{5}{4}$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$\frac{25}{16}=\frac{m+14}{3}+\frac{2}{3}\rightarrow \frac{25}{16}=\frac{m+16}{3}$

$\Rightarrow mx^2+3x+2=0$

$m=-1\rightarrow -x^2+3x+2=0$

مجموع جذرها $=\frac{-b}{a}\rightarrow \frac{3}{-1}=-3$