۱۸,۵۳

۱) ب

الف) $(۹, x+۲y)$, $(۳x-y, -۴)$ $\rightarrow 9 = ۳x - y \rightarrow ۱۸ = ۶x - ۲y$

$x+۲y = -۳$, $۲y = -۶ \rightarrow y = -۳$ $\rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۲}{-۳} = -\frac{۲}{۳}$

$۱۴ = ۷x \rightarrow x = ۲$

ب) $(-۳, -۱)$, $(\frac{۱}{y} - \frac{۱}{x}, \frac{۵}{x} - \frac{۷}{y})$

$\frac{۵}{x} - \frac{۷}{y} = -۳$, $\frac{۵}{x} - \frac{۵}{y} = -۵ \rightarrow -۵ = \frac{۵}{x} - \frac{۵}{y} \rightarrow -۱ = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}$

$-۲ = \frac{۲}{y}$

$y = -۱$, $\frac{۵}{x} = -۱۰ \rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$

$\frac{x}{y} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-۱} = \frac{۱}{۲}$

۲) ب

$\{(۲,b), (۱,-۲), (۱,-۲), (۲,-۱), (-۳,-۶)\}$

$a+۱ = -۲ \rightarrow a = -۳$

$f(a) + ۲f(۲) = ۳f(۱) \rightarrow -۶ + ۲f(۲) = ۳x-۲$

$f(a) = f(-۳) = ۲x-۳ = -۶$

$f(۱) = -۲$

$۲f(۲) = ۰$

$f(۲) = ۰ \rightarrow b = ۰$

۳) ب

$m^۲ - ۳m = -۲ \rightarrow m^۲ - ۳m + ۲ = ۰ \rightarrow (m-۱)(m-۲) = ۰$ $\begin{cases} m = ۲ \\ m = ۱ \end{cases}$

پس به ازای هیچ مقداری

$m = ۲$ یا $m+۱ = ۲+۱ = ۳ \rightarrow (۳,۵), (۳,۶)$ $\rightarrow$ تابع نیست

$m = ۱$ یا $m+۱ = ۱+۱ = ۲ \rightarrow (۲,۴), (۲,۶)$ $\rightarrow$ تابع نیست

۴) ب

الف) تابع نیست — در بیش از یک نقطه قطع شده

ب) ✓ تابع است

ج) تابع نیست — در دو نقطه قطع شده

د) ✓ تابع است

۵) حل قسمت ب در صفحه بعدی

الف) $y = \sqrt{x+۱}$

$y_۱ = -\sqrt{x+۱}$ $\rightarrow$ تعریف ریاضی

$y_۲ = \sqrt{x+۱}$

✓ تابع است $y_۲ = y_۱$

$y = x$ ب

$\frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}} = x$ $\rightarrow$ حالت نقض

$x = ۱ \rightarrow \frac{y}{\sqrt{۱-y^۲}} = ۱ \rightarrow y^۲ = (\sqrt{۱-y^۲})^۲ \rightarrow y^۲ = ۱ - y^۲$

$y^۴ = ۱ \rightarrow y = \pm ۱$

تابع نیست

الف) $x=|y|$ مثال نقض $\longrightarrow$ $|y|=1 \rightarrow y=\pm 1$ تابع نیست

ب) $y^3+3y^2+3y+x^3+x=0 \xrightarrow{\text{تعریف ریاضی}} \begin{cases} y_1^3+3y_1^2+3y_1+x^3+x=0 \\ y_2^3+3y_2^2+3y_2+x^3+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y_1)^3+3(y_1)^2+3(y_1)=-x^3-x \\ (y_1+1)^3=-x^3-x \end{cases}$

$(y_2+1)^3=-x^3-x$

$y_1=y_2 \rightarrow y_1+1=y_2+1$ ✓ تابع است

۷) $\dfrac{(\sqrt{3}-2)^2+4(\sqrt{3}-2)+8}{(\sqrt{3}-1)^2+4(\sqrt{3}-2)+7}=\dfrac{3+4-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-8+8}{3+4-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-8+7}=\dfrac{-1+8}{-1+7}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

۸) $y=3x-a \rightarrow -4=3(-1)-a \rightarrow -4=-3+a \rightarrow a=1$

$f(-1)=(-1)^3-a+b=-4 \rightarrow -1-(+1)+b=-4 \rightarrow b=-2$

$f(x)=x^3+x-2 \quad x^3+x-2=3x-1 \rightarrow x^3-2x-1=0$

$y=3x-1$

$x^3-2x-1 \;\big|\; x+1$

$-x^3-x^2 \qquad x^2-x-1$

$-x^2-2x-1$

$-x^2-x$

$-x-1$

$(x+1)(x^2-x-1)$

$\dfrac{-b}{a}=1$

$\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}$

۹) در تابع ثابت به ازای هر x خروجی ثابتی بدست می‌آید.

$a+b=2a$

$b=a$

$2a=a-2b+1 \rightarrow 2a=a-2(a)+1 \rightarrow 2a=a-2a+1 \rightarrow 2a=-a+1$

$3a=1 \rightarrow a=\dfrac{1}{3}$

۱۰) برد = دامنه

$f(x)=\dfrac{4x^2-ax+c+1}{bx+2}=x \rightarrow 4x^2-ax+c+1=bx^2+2x$

$b=4 \quad a=-3 \quad c=-1$

$a+b+c=4-3-1=0$

قسمت ب سوال ۵

$x=\dfrac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}} \qquad x=\dfrac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}}$

$\dfrac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}}=\dfrac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} \rightarrow \dfrac{y_1^2}{1-y_1^2}=\dfrac{y_2^2}{1-y_2^2}$

حون مضرج ⊕ است پس y_1 و y_2 حتما علامت دارند

$y_1^2-y_1^2y_2^2=y_2^2-y_1^2y_2^2 \rightarrow y_1^2=y_2^2 \rightarrow |y_1|=|y_2|$

$y_1=y_2$