به نام خدای رنگین کمان

تکلیف ۲۸

زهرا اسرابی

---

۱)

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲x & ;x\ge a\\ ax-۴ & ;x\le a\end{cases}$$

$\xrightarrow[x=a]{} a^{۲}+۲a$

$\xrightarrow[x=a]{} a^{۲}-۴$

$\cancel{a^{۲}}+۲a=\cancel{a^{۲}}-۴$

$۲a=-۴$

$a=-۲$

---

۲)

$g(x)=۲x+b \qquad f(x)=\dfrac{x^{۲}+a}{۲x-b}$

$g(۲)=۳=۲(۲)+b$

$b=-۱$

$f(۲)=۳=\dfrac{۴+a}{\underbrace{۴-b}_{۴-(-۱)=۵}}\to ۱۵=۴+a\to a=۱۱$

$f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱۱}{۲x+۱}\to f(۱)=\dfrac{۱+۱۱}{۲+۱}=\dfrac{۱۲}{۳}=\boxed{۴}$

---

۳)

$f(x)=\dfrac{۴x+۱}{۲x^{۲}+ax+b} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۴\}$

$۲x^{۲}+ax+b\ne ۰$

$x=-۱\to ۲(-۱)^{۲}+a(-۱)+b=۰\to ۲-a+b=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \begin{cases}-۲+a-\cancel{b}=۰\\ ۳۲+۴a+\cancel{b}=۰\end{cases}$

$x=۴\to ۲(۴)^{۲}+a(۴)+b=۰\to ۳۲+۴a+b=۰\to$

$۳۰+۵a=۰\to ۳۰=-۵a\to \boxed{a=-۶}\to \boxed{b=-۸}$

$f(x)=\dfrac{۴x+۱}{۲x^{۲}-۶x-۸}$

$f(۱)=\dfrac{۴(۱)+۱}{۲(۱)^{۲}-۶(۱)-۸}=-\dfrac{۵}{۱۲}$

---

۴)

$f(x)=\dfrac{x^{۳}-\sqrt{۳}}{-۴x^{۲}+ax+b}$

$D_f=R-\{-۱\}\to -(۲x+k)^{۲}=-۴x^{۲}+ax+b\to -(۴x^{۲}+۴xk+k^{۲})=-۴x^{۲}-۴xk-k^{۲}=-۴x^{۲}+ax+b$

$x=-۱\to -(\overset{-۲}{\cancel{۲(-۱)}}+k)^{۲}=۰\to k=۲$

$k=۲\to -۴x^{۲}-۸x-۴=-۴x^{۲}+ax+b$

$\boxed{\begin{matrix}b=-۴\\ a=-۸\end{matrix}}\to b+a=-۱۲$

$x=-۱\to -۴x^{۲}+ax+b=۰\to -۴(-۱)^{۲}+a(-۱)+b=۰\to -۴-a+b=۰\to b-a=۴$

---

۵)

$f(x)=\dfrac{۲x}{(x-۱)(x^{۲}+mx+۱)} \qquad D_f=R-\{۱\}$

$x=۱$

$x=۱\to (x^{۲}+mx+۱)=۰\to ۱+m+۱=۰\to m=-۲$

$\Delta=b^{۲}-۴ac\to \Delta=m^{۲}-۴(۱)(۱)=m^{۲}-۴<۰$

$m^{۲}<۴\to -۲<m<۲$

$\boxed{\text{محدوده } m=[-۲,۲)}$

---

۶)

$f(x)=\sqrt{۴-\dfrac{۱}{x^{۲}}}$

$۴-\dfrac{۱}{x^{۲}}\ge ۰\to ۴\ge \dfrac{۱}{x^{۲}}\to x^{۲}\ge \dfrac{۱}{۴}\to x\ge \dfrac{۱}{۲}$ یا $x\le -\dfrac{۱}{۲}$

$D_f=(-\infty,-\dfrac{۱}{۲}]\cup[\dfrac{۱}{۲},+\infty)$

$x^{۲}\ne ۰\to x\ne ۰$

---

۷)

$f(x)=\sqrt{mx^{۲}+۲mx+۱}$

$mx^{۲}+۲mx+۱\ge ۰$

$m\ge ۰$

اگر m (ضریب $x^{۲}$) منفی باشد نمودار سهمی رو به پایین است و منفی می‌شود.

$\Delta\le ۰\to (۲m)^{۲}-۴(m)(۱)\le ۰\to ۴m^{۲}-۴m\le ۰\to ۴m(m-۱)\le ۰$

$m=۰ \quad m=۱\to \boxed{[۰,۱]}$

۰ ۱

\+ ۰ − ۰ +

---

۸)

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۴x^{۲}-۱}{۲x-۱} & ;x\ne a\\ ۴x+k & ;x=\dfrac{۱}{۲}\end{cases} \qquad g(x)=۲x+۱$

مخرج به ازای a برابر صفر می‌شود.

$۲x-۱\to ۲a-۱=۰\to a=\dfrac{۱}{۲}$

$۴x+k=۲x+۱$

$۲+k=۲$

$\boxed{k=۰}$

$\boxed{a+k=\dfrac{۱}{۲}}$

---

۹)

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۹x^{۲}-۴}{۳x+۲} & ;x\ne -\dfrac{۲}{۳}\\ ۳ax+۲ & ;x=-\dfrac{۲}{۳}\end{cases}$

$g(x)=۳x+b \xrightarrow{x=-\frac{۲}{۳}} ۳ax+۲=۳x+b$

$\cancel{۳}(-\dfrac{۲}{\cancel{۳}})a+۲=\cancel{۳}(-\dfrac{۲}{\cancel{۳}})+b\to -۲a+۲=-۲+b \xrightarrow{b=-۲} -۲a+۲=-۲-۲$

$-۲a=-۶$

$a=۳$

$a-b=\boxed{۳-(-۲)=۵}$

$\dfrac{۹x^{۲}-۴}{۳x+۲}=۳x+b\to (۳x+b)(۳x+۲)=۹x^{۲}-۴$

$(۳x+b)(۳x+۲)=(۳x-۲)(۳x+۲)$

$b=-۲$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & ;x\neq ۲\\ ۲a^{۲}+ax & ;x=۲\end{cases}\qquad g(x)=x+۲$$

۱۰

$$۲a^{۲}+ax=x+۲\xrightarrow[x=۲]{}۲a^{۲}+۲a=۴\rightarrow ۲a^{۲}+۲a-۴=۰\rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۴-۴(۲)(-۴)=۳۶$$

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\rightarrow\frac{-۲\pm\sqrt{۳۶}}{۴}\begin{cases}\nearrow\boxed{-۲}\\ \searrow\boxed{۱}\end{cases}$$