آزمون پودمکی

۱

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

$a > 0$ و $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} > 1$ ← مینیمم دارد

$y = 2(1)^2 - 3(1) + 1 = 0$

ب) $y = -2x^2 + 3x - 5$

$a < 0$ و $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ ← ماکسیمم دارد

$y = -2(\frac{3}{4})^2 + 3(\frac{3}{4}) - 5 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - 5 = -\frac{7}{8}$

۲

الف) $y = x^2 - 4x + 1$

$a > 0$

رئوس: $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ ، -3

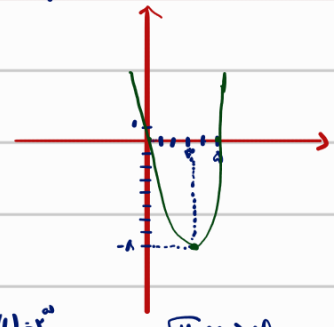
عرض از مبدا $= 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(1) = 12$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \to 2 \pm \sqrt{3}$

$2 + \sqrt{3} \simeq 2 + 1.7 = 3.7$

$2 - \sqrt{3} \simeq 2 - 1.7 = 0.3$



ب) $y = -x^2 + 4x + 1$

$a < 0$

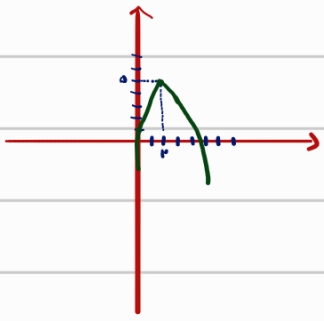
رئوس: $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$ ، 5

عرض از مبدا $= 1$

$-x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \to 2 + \sqrt{5} \simeq 4.2$ ، $2 - \sqrt{5} \simeq -0.2$



۳

$3x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$

$\alpha\beta = -2$ ← $\alpha = 2$ ، $\beta = -1$ یا $\alpha = -2$ ، $\beta = 1$

$x = 2 \to 3(2)^3 + k(2)^2 - 9(2) - 2 = 0$

$24 + 4k - 18 - 2 = 0$

$4k = -4$

$k = -1$

۴

$x_1 x_2 = 1$ ، $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 1$ ، $x_1 = 4 + 2\sqrt{3}$

$x_1 + x_2 = m + 3$ ، $\frac{1}{4 + 2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = m + 3$

$m = 2\sqrt{3}$

$w = x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2$ ، $w = x_1 x_2$

؟؟؟

۵

$\Delta > 0$ ← عرض از مبدا $= \frac{m}{3}$

$\alpha + \beta = \frac{m+2}{3}$ ، $\alpha\beta = \frac{m}{3}$

$S = \frac{1}{2} \times |x_1 - x_2| \times |m|$

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$\Delta = (m+2)^2 - 8m = m^2 - 4m + 4$

$|x_1 - x_2| = \frac{|m-2|}{3}$

$S = \frac{1}{2} \times |m| \times \frac{|m-2|}{3} = 3$

$\frac{|m(m-2)|}{3} = 3 \to |m(m-2)| = 9$

$m(m-2) = 9 \to m^2 - 2m - 9 = 0$

$m = 1 \pm \sqrt{10}$

$m(m-2) = -9 \to m^2 - 2m + 9 = 0$ ← $\Delta < 0$ ، غ ق ق

۶

$a < 0$ و $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2a}$ ، $y = a - \frac{b}{3a}$

$a - \frac{b}{3a} = \frac{7}{8} \to 8a^2 - 8a = 7a^2 - 21a \to a^2 + 13a = 0$

$a = -13$ ← غ ق ق $a < 0$

$a = 0$ ← غ ق ق $a \neq 0$

$a = 2$

$\alpha_1 = 2n - 1$ ، $\beta_1 = 2n + 1$ در معادله x^2

$\alpha_1 + \beta_1 = 4n$ ، $\alpha_1 \beta_1 = \alpha$

$\alpha_1 + \beta_1 = (1+2n)^2 (1-2n) \to 4n = 1 - 8n^3 \to 8n^3 + 4n - 1 = 0$

$n = 1$ ← $(n-1)(8n^2 + 8n + 1) = 0$ ← $n = 0$ نوع دوم غ ق ق

$\alpha_1 \beta_1 = (1+2n)(1-2n) = 1 - 4n^2 = 3$

$\alpha = 1 - (1)^3 = 0$

$3 = 3 \times 1$

۱

$x^2-(2a+1)x+b=0$ معادله‌ی درجه دوم با ریشه‌های α و β

$\alpha^2+\beta^2=2m+2m+2=4m+2=10 \Rightarrow 4m=8 \Rightarrow m=2$ ، $b=24$

$\alpha^2\beta^2=m(2m+2)=4m(m+1)=b$ $\Rightarrow 24-3=\boxed{21}$

۷

$y=-2x^2+ax+2 \rightarrow \frac{-b}{2a}=\frac{-a}{-4}=\frac{1}{4}=x$

$y=\frac{3}{4}+\frac{a}{4}+2=\frac{a+11}{4}$

$-2x^2-bx-1 \rightarrow x=\frac{1}{4}, y=\frac{a+11}{4} \rightarrow \frac{1}{8}-\frac{b}{4}-1=\frac{a+11}{4} \Rightarrow -4=a+11 \Rightarrow \boxed{a=-15}$

۶

$y=ax^2+ax+2$ از نقطه‌ی $(1,-6)$ می‌گذرد

$-6=a+a+2 \Rightarrow a=-4$

$y=-4x^2-4x+2$

$-4x^2-4x+2=0 \rightarrow 2x^2+2x-1=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ، $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$x_1^2+x_2^2=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}+\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\frac{8}{4}=2$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=-1(2+1)=-3$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=4-2(\frac{1}{4})=\frac{7}{2}$

$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4x_2^4}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{16}}=56$

$2-(-3)+\frac{7}{2}+56=\boxed{\frac{123}{2}}$

۹

$y=ax^2+bx+c$ ، $a>0$ ، $\Delta<0$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2a}=\alpha+\beta \rightarrow -3=2a\alpha+2a\beta$

$\frac{c}{a}=\frac{\beta}{2a}=\alpha\beta \rightarrow \beta=2a\alpha\beta$

$-3=2a\alpha+4a^2\alpha^2\beta$

$-3=2a\alpha+4a^2\alpha^2(-3-2a\alpha)$

$-3=2a\alpha-12a^2\alpha^2-8a^3\alpha^3$

$8a^3\alpha^3+12a^2\alpha^2-2a\alpha-3=0$

$(2a\alpha-1)(4a^2\alpha^2+8a\alpha+3)=0$

$2a\alpha=1$ ، $4a^2\alpha^2+8a\alpha+3=0$

$\alpha=\frac{1}{2a}$ ، $\alpha=\frac{-3}{2a}$

$\alpha+\beta=\frac{-3}{2a}$ ، $\alpha\beta=\frac{1}{2a}$

$\beta=\frac{-3}{2a}-\frac{1}{2a}=\frac{-4}{2a}=\frac{-2}{a}$

$\alpha\beta=\frac{-2}{a^2}=\frac{1}{2a}$ $\Rightarrow a=-4$

$\alpha=\frac{1}{2a}=\frac{-1}{8}$ ، $\beta=\frac{-2}{a}=\frac{1}{2}$

$y=-4x^2+3x+\frac{1}{2}$

۵

$y=ax^2+bx+c$ ، $a<0$ ، $\Delta>0$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}=x$

$\frac{3}{4}-\beta=\frac{3}{2a}$

$\alpha+\beta=\frac{3}{4}$ ، $\alpha\beta=\frac{1}{2a}$

$\beta=\frac{3}{4}-\alpha$

$\alpha(\frac{3}{4}-\alpha)=\frac{1}{2a}$

$\frac{3}{4}\alpha-\alpha^2=\frac{1}{2a}$

$\frac{3}{4}\alpha-\alpha^2=\frac{-2}{8a}$

$\frac{3}{4}\alpha-\alpha^2=\frac{-2}{8a}$

$\frac{3}{4}\alpha-\alpha^2=\frac{-2}{-4}$

$\frac{3}{4}\alpha-\alpha^2=\frac{1}{2}$

$\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{2}=0$

$\Delta=\frac{9}{16}-2=\frac{-23}{16}<0$ ✗

۱۰

$a+b=a^2+b^2-11 \rightarrow a(a-1)+b(b-1)=11$

$ab=a+b-1$

$a^2-a=6$ ، $b^2-b=5$

$a^2-a-6=0$ ، $b^2-b-5=0$

$(a-3)(a+2)=0$ ، $b=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

$a=3$ ، $a=-2$

$a+b=5$ ، $a+b=-1$

چون ۲ عدد ۱۱ شده که با بیشترین مقدار ممکن گزینه از منفی یک شده‌اند که کوچکترین مقدار ممکن را بدست آورده است

$\rightarrow \boxed{a+b=5}$

۱۱

$x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$

$\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+2)=4m^2+4m+1-4m^2-8=4m-7$

$4m-7=0 \Rightarrow m=\frac{7}{4}$

$x=\frac{2m+1}{2}=\frac{\frac{14}{4}+1}{2}=\frac{\frac{18}{4}}{2}=\frac{9}{4}$

$y=x^2-(2m+1)x+m^2+2=x^2-2x+1+m^2+1=(x-1)^2+m^2+1$

$y=(\frac{9}{4}-1)^2+(\frac{7}{4})^2+1=\frac{25}{16}+\frac{49}{16}+1=\frac{90}{16}=\frac{45}{8}$