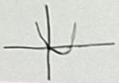
تکلیف سری ۲۵ ⇐ به نام خدا لعیا کرباسیان

۱۸

-۱

الف) $y = ۳x^۲ - ۲x$



$y = x(۳x - ۲)$ ✓

۰ ، $\frac{۲}{۳}$

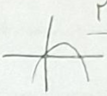
ناحیه ۴

۲

ب) $y = -x^۲ + ۴x$

$y = -x(x - ۴)$ ✓

۰ ، ۴

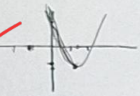


ناحیه ۲

-۲

الف) $y = ۲x^۲ - ۵x + ۲$ ناحیه ۳

$min \left| \begin{matrix} \frac{۵}{۴} \\ -\frac{۹}{۸} \end{matrix} \right.$ ✓

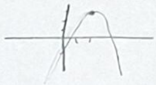


ناحیه ۱و ۲و ۴

ب) $y = -x^۲ + ۴x - ۱$ ناحیه ۲

$max = \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix} \right.$ ✓

۲



ناحیه ۱و ۴و ۳

-۳

$x^۲ - x - ۳ = ۰$ $\alpha\beta = -۳$

$\alpha + \beta = ۱$

$(\alpha+\beta)^۲ - (\alpha-\beta)^۲ = ۴\alpha\beta$

$۱۳ = (\alpha-\beta)^۲$

$\sqrt{۱۳} = \alpha - \beta$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ ✓

ب) $\alpha^۲ + \beta^۲ = ?$ $(\alpha+\beta)^۲ + (\alpha-\beta)^۲ = ۲(\alpha^۲ + \beta^۲)$

$۷ = \alpha^۲ + \beta^۲$ ✓

۲

ج) $\alpha^۳ + \beta^۳ = ?$ $\alpha^۳ + \beta^۳ = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{۱}\underbrace{(\alpha^۲+\beta^۲ - \alpha\beta)}_{}$

$\boxed{۱۰} = ۱ \times (۷ + ۳)$ ✓

د) $\alpha^۳ - \beta^۳ = ?$ $\alpha^۳ - \beta^۳ = (\alpha-\beta)(\alpha^۲ + \beta^۲ + \alpha\beta)$

$۴\sqrt{۱۳} = \sqrt{۱۳} \times ۴$ ✓

-۴

$y = (x-۲)(x^۲ - ax + a)$

① $\Delta < ۰ \rightsquigarrow a^۲ - ۴a < ۰ \to \underset{۰}{a}\underset{۴}{(a-۴)} < ۰$ $\overset{۰ \quad ۴}{+ \mid - \mid +}$

② $\Delta = ۰$ $a^۲ - ۴a = ۰ \to a = ۰$ ✗ ، $a = ۴$ ✓ $\frac{+a}{۲} = ۲ \to a = ۴$

ریشه مضاعف $= ۲$

$a \in (۰, ۴]$ ✓

۲

-۵

$۳x^۲ - ۱۲x - a = ۰$ $\alpha\beta = -\frac{a}{۳}$ $\alpha + \beta = ۴$

$۲\alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha - ۷ = ۰$ $\alpha^۲ + \beta^۲ = ?$

$۳\alpha^۲ - ۱۲\alpha - a = ۰$

$۳\beta^۲ - ۱۲\beta - a = ۰$ $\to ۳(\alpha^۲ - ۴\alpha) - a = ۰$

$\alpha^۲ - ۴\alpha = \frac{a}{۳}$

$\alpha^۲ + \frac{a}{۳} + \beta^۲ - ۷ = ۰$

$(\alpha+\beta)^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\alpha\beta$

$۱۶ = \alpha^۲ + \beta^۲ - \frac{۲a}{۳}$

$۱۶ + \frac{۲a}{۳} = \alpha^۲ + \beta^۲$

$۱۶ + \frac{۲a}{۳} + \frac{a}{۳} - ۷ = ۰$

$۹ + a = ۰ \to \boxed{a = -۹}$

$۳x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰ \to ۱$ ، ③

$\frac{-۹}{۳} = \boxed{-۳}$ ✓

۲

-۶

$A = \left| \begin{matrix} ۲a+۳ \\ a-۲ \end{matrix} \right.$ $B = \left| \begin{matrix} ۷-۲a \\ a-۲ \end{matrix} \right.$ $b = \frac{\cancel{۲a} + ۳ + ۷ - \cancel{۲a}}{۲} = ۵$ $b - ۲ = ۳$

$\frac{-b}{۲a} = ۵ \to \boxed{b = -۱۰a}$

$\frac{-\Delta}{۴a} = ۳ \to -\Delta = ۱۲a$

$۴ac - b^۲ = ۱۲a$

$۴ac = ۱۰۰a^۲ + ۱۲a$

$\boxed{c = ۲۵a + ۳}$

$y = ax^۲ + bx + c$

$y = ax^۲ - ۱۰ax + ۲۵a + ۳ \xrightarrow{\left| \begin{matrix} ۵ \\ ۳ \end{matrix} \right.} ۳ = ۲۵a - ۵۰a + ۲۵a + c$

$\boxed{۳ = c}$

↓

فاصله سهمی از مبدأ مختصات

۱٫۵

-۷

$a x^{۲} - a x - b = ۰$

$\left.\begin{array}{l}\alpha\beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha+\beta = ۱\end{array}\right\}$

$\alpha = ۱ - \beta$

$(\alpha+\beta)^{۲} - (\alpha-\beta)^{۲} = ۴\alpha\beta$

$۱ - (\alpha-\beta)^{۲} = \frac{۱}{۵}$

$\frac{۴}{۵} = (\alpha-\beta)^{۲}$

$\boxed{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \alpha - \beta$

$۴۰\beta^{۲} + ۲۰\alpha^{۲} - ۲۰\beta = ۱۷$

$۲۰\beta^{۲} + ۲۰(\alpha^{۲} + \beta^{۲}) - ۲۰\beta = ۱۷$

$۲۰\beta^{۲} + ۲۰(۱ + \beta^{۲} - ۲\beta + \beta^{۲}) - ۲۰\beta = ۱۷$

$۲۰\beta^{۲} + ۴۰\beta^{۲} + ۲۰ - ۴۰\beta - ۲۰\beta = ۱۷$

$۶۰\beta^{۲} - ۶۰\beta = -۳$

$۶۰\beta(\beta - ۱) = -۳$

$\beta(\beta - ۱) = -\frac{۱}{۲۰}$

$-\alpha\beta = -\frac{۱}{۲۰}$

$\boxed{\alpha\beta = \frac{۱}{۲۰}}$

(۲)

-۸

$x_S = -۲$

$y_S = -\frac{۱}{۲}$

$y = a(x+۲)^{۲} - \frac{۱}{۲} \rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x+۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}$

$\frac{۳}{۲} = a(۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}$

$\frac{۴}{۲} = ۴a$

$\boxed{\frac{۱}{۲} = a}$

$\beta = \frac{۱}{۲}(۱+۲)^{۲} - \frac{۱}{۲}$

$\boxed{\beta = ۴}$

(۲)

-۹

$x^{۲} + ۶x + a = ۰$ $\qquad \alpha < \beta < ۰$

$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = -۶ \\ \alpha\beta = a\end{array}\right\} \alpha^{۲} + \beta^{۲} = ۳۶ - ۲a$

$\alpha^{۲} + ۶\alpha + a = ۰$ $\qquad \beta^{۲} + ۶\beta + a = ۰$

$a = -\alpha^{۲} - ۶\alpha$

$۳\alpha^{۲} + ۲\beta^{۲} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\alpha^{۲} + ۲(۳۶ - ۲a) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\alpha^{۲} + ۷۲ - ۴a = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\alpha^{۲} + ۷۲ - ۴(-\alpha^{۲} - ۶\alpha) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\alpha^{۲} + ۷۲ + ۴\alpha^{۲} + ۲۴\alpha = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$۵\alpha^{۲} + ۲۴\alpha - ۱۳ - ۱۲\sqrt{۲} = ۰$

(۱)

-۱۰

$\sqrt{\frac{۱}{\alpha}} + \sqrt{\frac{۱}{\beta}} = ۵$ $\qquad ۳۶x^{۲} - (m+۱۴)x + ۱ = ۰$

$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} = ۵$

$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = -۷ \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -۷ \rightarrow \frac{\frac{m+۱۴}{\cancel{۳۶}}}{\frac{۱}{\cancel{۳۶}}} = -۷ \rightarrow \boxed{m = -۲۱}$ $\qquad m x^{۲} + ۳x + ۲ = ۰ \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{m} = \boxed{\frac{-۲}{۲۱}}$

(۱,۲)

۶

$$x_S = \frac{۷-۲a+۲a+۳}{۲} = ۵ \rightsquigarrow y_S = ۳$$

$$\begin{cases} ۷-۲a>۰ \\ ۴a+۳>۰ \\ a-۲>۰ \end{cases} \rightsquigarrow \underbrace{۲<a<۳٫۵}_{a=۳}$$

نقاط A و B با طول و عرض مثبت هستند ←

$$a=۳\begin{cases} A(۹,۱) \\ B(۱,۱) \end{cases} \rightsquigarrow y-۳ = a(x-۵)^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} a = -\frac{۱}{۸}$$

$$(y-۳) = -\frac{۱}{۸}(۰-۵)^۲ \longrightarrow y = ۳ - \frac{۲۵}{۸} = -\frac{۱}{۸}$$

فاصله تا مبدا مختصات $\frac{۱}{۸}$ است

۹

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲ = \frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲) = ۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\frac{۵}{۲}(S^۲-۲P)+\frac{۱}{۲}(S)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right) = ۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)+\frac{۱}{۲}(-۶)(-\sqrt{۳۶-۴a}) = ۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۹۰-۵a+۳\sqrt{۳۶-۴a} = ۱۲\sqrt{۲}+۸۵ \rightarrow ۹۰-۵a = ۸۵ \longrightarrow a=۱$$

۱۰

$$A = \sqrt{\frac{۱}{\alpha}}+\sqrt{\frac{۱}{\beta}} = ۵ \longrightarrow A^۲ = \frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} = ۲۵$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} = ۲۵ \longrightarrow \frac{\frac{m+۱۴}{۳۶}}{\frac{۱}{۳۶}}+۲\sqrt{۳۶} = ۲۵ \longrightarrow m+۱۴+۱۲ = ۲۵ \longrightarrow m=-۱$$

$$y = mx^۲+۳x+۲ \longrightarrow P = \frac{۲}{m} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$