۱)

$x^2 - ax + b$

Sign chart: roots $1, 3$: $+ \mid - \mid +$

$S = a = 1 + 3 = 4$
$P = b = 3$
$\Rightarrow a + b = \boxed{7}$

---

۲)

$y = ((k-2)x + m - 1)(x - 3n)^2$

Sign chart: x: -1, 4; P: $+ \mid + \mid -$

$k \in \mathbb{N}$

$(x-3n)^2$ ← ریشه مضاعف = ریشه عبارت

۴ ریشه عبارت درجه ۱ ما

$3n = -1 \Rightarrow \boxed{n = -\frac{1}{3}} \Rightarrow (x+1)^2$

چون $(x+1)^2$ همواره مثبت ⟵ تعیین علامت تعیین علامات عبارت اول ⟹ در عبارت درجه اول بعد از ریشه علامت مخالف ضریب x ⟹ $k - 2 < 0 \rightarrow k < 2$ ⟶ چون عضو $\mathbb{N}$ ⟶ $\boxed{k = 1}$

$x = 4 \Rightarrow$ عبارت اول صفر می‌کند $\Rightarrow 4k - 8 + m - 1 = 0$ ، $4k + m - 9 = 0 \Rightarrow m = 9 - 4k \xrightarrow{k=1} \boxed{m = 5}$

$\frac{m}{n} + k = \frac{5}{-\frac{1}{3}} + 1 = -15 + 1 = \boxed{-14}$

---

۳)

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 4x + 12 > 7 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x-5)(x+1) < 0$

Sign chart: roots $-1, 5$: $+ \mid - \mid +$

$\Rightarrow (a, b) = (-1, 5) \rightarrow b - a = 5 + 1 = \boxed{6}$

---

۴)

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
$x > 0$

$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$

Sign chart: roots -1, ($x>0$), 1, 3: $- \mid + \mid - \mid +$

پایین محور ها $\Rightarrow y < 0 \Rightarrow (a, b) = (1, 3) \xrightarrow{\text{نقطه میانی}} = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(x) = (1)(3)(-1) = \boxed{-3}$

---

۵)

$y = (a-1)x^2 + (a-1)x + 1 \xrightarrow{\text{همواره منفی}}$ $a - 1 < 0 \rightarrow a < 1$ ①

$\Delta < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0$

Sign chart: roots $1, 5$: $+ \mid - \mid +$ ← ② $a \in (1, 5)$

① ∩ ② $= \varnothing$ ⟶ a به هیچ عددی تعلق ندارد

---

۶)

$\frac{m(m^3 + m)}{m - 2} \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} \frac{m^2(m^2+1)}{m-2}$ (همواره مثبت)

Sign chart: roots 0^*, 2: $- \mid - \mid +$

$\Rightarrow m > 2$

---

۷)

$\frac{(x^2 - x - 6)(x-1)^2}{(x^2+x+1)(2-x)^3} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)(x-1)^2}{(x^2+x+1)(2-x)^3} \leq 0$

(x^2+x+1: همواره مثبت)

Sign chart: roots -2, 1^*, 2, 3: $+ \mid - \mid - \mid + \mid -$

$D.S = [-2, 2) \cup [3, +\infty)$

---

۸)

$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} = \frac{x(3x-2)}{x^2+4} \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2+4} < 2$ ، $3x^2 - 2x < 2x^2 + 8$

$x^2 - 2x - 8 < 0$ ، $(x-4)(x+2) < 0$

Sign chart: roots $-2, 4$: $+ \mid - \mid +$

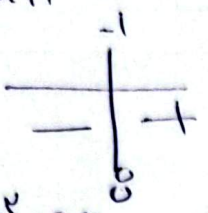
$\Rightarrow (a, b) = (-2, 4)$

$\boxed{b - a = 6}$

$-1 < \frac{3x^2-4x}{x+1} < 0$

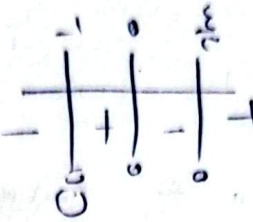
① $\frac{3x^2-4x}{x+1} > -1 \quad \frac{3x^2-4x}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x^2-4x+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x^2-3x+1}{x+1} > 0$

$a > 0$, $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ → همواره مثبت



$\Rightarrow x > -1$

② $\frac{3x^2-4x}{x+1} < 0 \quad \frac{x(3x-4)}{x+1} < 0$



$\Rightarrow x < -1$ یا $0 < x < \frac{4}{3}$

$x < -1$ یا $0 < x < \frac{4}{3}$

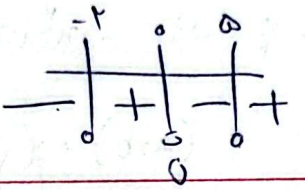
یا

$x \in (0, \frac{4}{3})$

$J = (0, \frac{4}{3})$

$\frac{x^2-10}{x} \geq 3 \quad \frac{x^2-10}{x} - 3 \leq 0 \quad \frac{x^2-3x-10}{x} \leq 0$

$\frac{(x-5)(x+2)}{x} \leq 0$



$\Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (0, 5]$