۱۹٫۵ آفرین

۱) الف) $(9, x+2y)$, $(3x-y, -4)$ $\Rightarrow 3x-y=9 \Rightarrow -6x+2y=-18$; $x+2y=-4$

$-x-18=-4 \Rightarrow -x=14 \Rightarrow x=-14$; $x+2y=-4 \Rightarrow -14+2y=-4 \Rightarrow 2y=10 \Rightarrow y=5$

$\frac{x}{y}=\frac{-14}{5}$

ب) $(-1,-3)$ $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}, \frac{5}{x}-\frac{7}{y}\right) \Rightarrow \frac{y-x}{xy}=-1 \Rightarrow \frac{5y-7x}{xy}=-3 \Rightarrow -3xy=5y-7x$

$\Rightarrow 3y-3x=5y-7x \Rightarrow 2y=4x \Rightarrow y=2x$; $\frac{5y-7x}{xy}=-3 \Rightarrow -6xy=5y-7x$

$\frac{x}{y}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ ۲

۲) $f=\{(a,2a), (1,a+1), (1,-2), (2,b)\} \Rightarrow f=\{(-3,-6), (1,-2), (2,b)\}$

$a+1=-2 \Rightarrow a=-3$

$f(a)+2f(2)=3f(1) \Rightarrow -6+2b=-6 \Rightarrow b=0$ ۲

۳) $f=\{(-1, m^2-3m), (-1,2), (3,5), (2,6), (m+1,4), (m^2+2, 6m+1)\}$

$m^2-3m=2 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1$ یا $m=2$

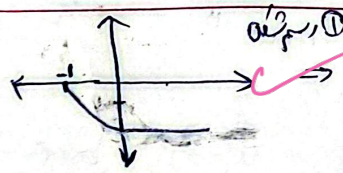
① $m=1 \Rightarrow (m+1,4)=(2,4)$ غ ق ن

② $m=2$ $(3,4)$ غ ق ن $\Rightarrow$ ۲

هیچ مقداری از m قابل قبول نیست

۴) الف) تابع ✓ ب) تابع ✗ ج) تابع ✗ د) تابع ✓ (اگر یک خط حداکثر بر گراف در بیش از یک نقطه قطع کند تابع است و اگر نکند تابع نیست)

۵) الف) $y=-\sqrt{x+1}$



① رسم شکل $\Rightarrow$ تابع ✓ ۲

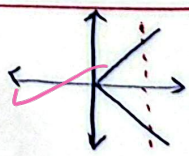
ب) $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{1-y^2}=y \xrightarrow{()^2} |1-y^2|=y^2$

به شرط $y \geq 1$ یا $y \leq -1$: $y^2-1=y^2 \Rightarrow -1=0$ غ ق ن

به شرط $-1 < y < 1$: $1-y^2=y^2 \Rightarrow 2y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

تابع ✗ ۲

۶) الف) $|y|=x$ $x=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow$ تابع ✗ ② راه



① راه $\Rightarrow$ تابع ✗

ب) $y^3+3y^2+3y+x^3+x=0 \Rightarrow y_1^3+3y_1^2+3y_1=y_2^3+3y_2^2+3y_2$

$(y_1-y_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)=3(y_2-y_1)(y_2+y_1)+3(y_2-y_1)$

$(y_1-y_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)=3(y_2-y_1)(y_2+y_1+1)$

$(y_1-y_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)+3(y_1-y_2)(y_2+y_1+1)=0$

$(y_1-y_2)(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+3y_2+3y_1+3)=0$ ① $y_1-y_2=0 \Rightarrow y_1=y_2$

و ② $y_1^2+y_1(y_2+3)+y_2^2+3y_2+3=0$ ۲

$\Delta=(y_2+3)^2-4(y_2^2+3y_2+3)=y_2^2+6y_2+9-4y_2^2-12y_2-12=-3y_2^2-6y_2-3=$

ادامه صفحه بعد

$-۳y_۲^۲ - ۷y_۲ - ۳ = -۳(y_۲^۲ + ۲y_۲ + ۱) = -۳(y_۲+۱)^۲ \Rightarrow \Delta \leq ۰$

$\Delta < ۰ \Rightarrow y_۱ = y_۲$ (ریشه‌ی مشترک)

$\Delta = ۰ \Rightarrow y_۲ = -۱ \xrightarrow{\text{عبارت}} y_۱^۲ + ۲y_۱ + ۱ = ۰ \Rightarrow (y_۱+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y_{۱,۲} = -۱ \Rightarrow y_۱ = y_۲$ ✓ تابع

(۷

$f(x) = \frac{x^۲+۴x+۵}{x^۲+۶x+۷} = \frac{(x+۲)^۲+۱}{(x+۱)^۲+۳} = \frac{۳^۲+۱}{۳^۲+۳} = \frac{۱۰}{۱۲} = \boxed{\frac{۵}{۶}}$

(۸

$P(x) = x^۳+ax+b$, $y = ۳x-a$ $\xrightarrow{(-۱,-۴)}$ $-۴ = -۱-a+b \Rightarrow b-a=-۳$, $-۲-a=-۴ \Rightarrow a=۱$, $b=-۲$

$x^۳+x-۲ = ۳x-۱ \Rightarrow x^۳-۲x-۱=۰$ $\quad x(x-۱)(x+۱)-(x+۱)=۰$

$(x+۱)(x^۲-x-۱)=۰$ ($x=-۱$) $\Rightarrow x^۲-x-۱=۰$ ← دو جواب این معادله، طول نقاط تلاقی است $\Rightarrow$ مجموع آن‌ها $= -\frac{b}{a} = \boxed{۱}$

(۹

$f = \{(۲,a+b), (۱,۲a), (-۱, a-۲b+۱)\}$ ← تابع ثابت

$a+b = ۲a \Rightarrow b=a$ $\quad a-۲b+۱ = ۲a \Rightarrow -a+۱ = ۲a \Rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۳}}$ $\quad b=\frac{۱}{۳}$

(۱۰

$f(x) = \frac{۴x^۲-ax+c+۱}{bx+۳}$ ← تابع خطی $\quad \frac{۴x^۲-ax+c+۱}{bx+۳} = x$

$(۴-b)x^۲ - (a+۳)x + c+۱ = ۰ \Rightarrow c=-۱$ $\quad a=-۳$ $\quad b=۴$ $\Rightarrow a+b+c=۰$

$\frac{۴x^۲+۳x}{۴x+۳} = x$ ← البته دامنه‌ی آن با عرض‌های نقاط $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{۳}{۴}\}$

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \rightarrow \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}} = \frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} \rightarrow \frac{y_1^2}{1-y_1^2} = \frac{y_2^2}{1-y_2^2}$$

۵

ب) ۱

$$\rightsquigarrow y_1^2 - y_1^2 y_2^2 = y_2^2 - y_1^2 y_2^2 \xrightarrow[\text{هم علامت}]{y_1, y_2} y_1 = y_2 \rightarrow$$

✓ رابطه‌ها تابع‌هستند