ریاضی - دهم پنجشنبه : تکلیف ۲۵

①

الف) $y = 3x^2 - 2x \rightarrow a > 0$ از ناحیه ۱ و ۲ می‌گذرد

$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{matrix} x_s > 0 \\ y_s < 0 \end{matrix} \rightarrow$ از ناحیه ۴ می‌گذرد

$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\times 3\times 0 - (-2)^2}{4\times 3} = \frac{0-4}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

از ناحیه ۳ نمی‌گذرد.

ب) $y = -x^2 + 4x \rightarrow a < 0 \rightarrow$ از ناحیه ۳ و ۴ می‌گذرد

$\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow \begin{matrix} x_s > 0 \\ y_s > 0 \end{matrix} \rightarrow$ از ناحیه ۱ می‌گذرد

$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)\times 0 - 4^2}{4(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4$

از ناحیه ۲ نمی‌گذرد.

②

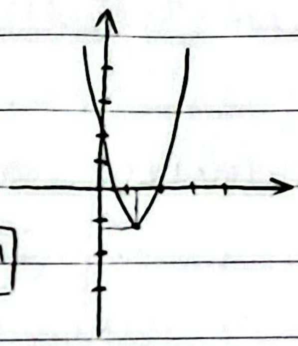
الف) $y = 2x^2 - 5x + 2 \rightarrow a > 0 \rightarrow$ از ناحیه ۱ و ۲ می‌گذرد

$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2\times 2} = \frac{5}{4} \rightarrow \begin{matrix} x_s > 0 \\ y_s < 0 \end{matrix} \rightarrow$ از ناحیه ۴ می‌گذرد

$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\times 2\times 2 - (-5)^2}{4\times 2} = \frac{16-25}{8} = \frac{-9}{8}$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 2\times 2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow \sqrt{9} = 3$

$\frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \ , \ \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



از ناحیه ۱ و ۲ و ۴ می‌گذرد

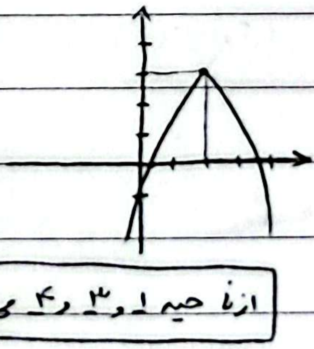
ب) $y = -x^2 + 4x - 1 \rightarrow a < 0 \rightarrow$ از ناحیه ۳ و ۴ می‌گذرد

$\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow \begin{matrix} x_s > 0 \\ y_s > 0 \end{matrix} \rightarrow$ از ناحیه ۱ می‌گذرد

$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-1) - 4^2}{4(-1)} = \frac{4-16}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$

$b^2 - 4ac = 16 - 4(-1)(-1) = 16 - 4 = 12$

$\frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 2 \pm \sqrt{3} = 2 \pm 1.7 \rightarrow 3.7 \ , \ 0.3$



از ناحیه ۱ و ۳ و ۴ می‌گذرد.

Subject

Year . Mont . Day . ( )

(۳)

$x^2 - x - 3 = 0 \rightsquigarrow \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$\hookrightarrow \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$

$\hookrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times(-3)}}{|1|} = \frac{\sqrt{1+12}}{1} = \sqrt{13}$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}}$

ب) $\alpha^2+\beta^2 \rightsquigarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2(-3) = 1+6 = \boxed{7}$

ج) $\alpha^3+\beta^3 \rightsquigarrow (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 1^3 - 3(-3)(1) = 1+9 = \boxed{10}$

د) $\alpha^3-\beta^3 \rightsquigarrow (\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

$= (\sqrt{13})^3 + 3(-3)(\sqrt{13}) = 13\sqrt{13} - 9\sqrt{13} = \boxed{4\sqrt{13}}$

(۴)

$y = (x-2)(x^2 - ax + a)$

برای اینکه $\hookrightarrow (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \rightsquigarrow a = 4$

برای اینکه $\hookrightarrow b^2 - 4ac = (-a)^2 - 4\times1\times a = a^2 - 4a < 0 \quad (\Delta < 0)$

$a(a-4) < 0 \rightsquigarrow$  $\rightsquigarrow (0,4)$

$(0,4) \cup \{4\} = \boxed{(0,4]}$

$۳x^۲ - ۱۲x - a = ۰$ $\rightsquigarrow \frac{-(-۱۲)}{۳} = \frac{۱۲}{۳} = ۴$ $\rightsquigarrow \frac{-a}{۳}$ ④

$۲\alpha^۲ + \beta^۲ - ۴\alpha = ۷ \rightsquigarrow \alpha^۲ + \beta^۲ + \alpha^۲ - ۴\alpha = ۷$

$\alpha^۲ + \beta^۲ \rightarrow (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۴^۲ - ۲(\frac{-a}{۳}) = ۱۶ + \frac{۲}{۳}a$

$۳\alpha^۲ - ۱۲\alpha - a = ۰ \rightsquigarrow \frac{۳\alpha^۲}{۳} - \frac{۱۲\alpha}{۳} = \frac{a}{۳} \rightarrow \alpha^۲ - ۴\alpha = \frac{a}{۳}$

$۱۶ + \frac{۲}{۳}a + \frac{۱}{۳}a = ۱۶ + a = ۷ \rightarrow a = -۹$

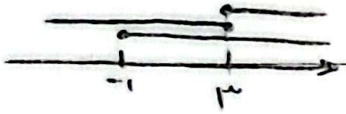
$۳x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰ \rightsquigarrow x^۲ - ۴x + ۳ = ۰ \rightarrow (x-۱)(x-۳) = ۰$

ریشه بزرگ‌تر $\rightsquigarrow ۳$

$\frac{-۹}{۳} = \boxed{-۳}$

⑥ $۷ - ۲a + ۲a + ۳ = \frac{۱۰}{۲} - a \rightsquigarrow S'_۱ = (a, ۳)$

$۷ - ۲a \geq ۱ \rightarrow ۶ \geq ۲a \rightarrow ۳ \geq a$ ، $a - ۲ \geq ۱ \rightarrow a \geq ۳$ ، $۲a + ۳ \geq ۱ \rightarrow a \geq -۱$



$\rightsquigarrow a = ۳ \rightsquigarrow (۱,۱), (۹,۱)$

$y = a(x-۵)^۲ + ۳ \overset{(۱,۱)}{\rightsquigarrow} ۱ = a(۱-۵)^۲ + ۳ \rightarrow ۱ = a(-۴)^۲ + ۳$

$۱ - ۳ = ۱۶a \rightarrow -۲ = ۱۶a \rightarrow a = \frac{-۲}{۱۶} = -\frac{۱}{۸} \rightsquigarrow y = -\frac{۱}{۸}(x-۵)^۲ + ۳$

$y = -\frac{۱}{۸}(x^۲ + ۲۵ - ۱۰x) + ۳ = -\frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۱۰}{۸}x - \frac{۲۵}{۸} + ۳ \rightsquigarrow -\frac{۲۵}{۸} + \frac{۲۴}{۸} = -\frac{۱}{۸}$

عرض از مبدأ

$\rightsquigarrow \boxed{-\frac{۱}{۸}}$

⑦ $ax^۲ - ax - b = ۰ \rightsquigarrow -\frac{(-a)}{a} = \frac{a}{a} = ۱ \rightsquigarrow \frac{-b}{a}$

$۴۰\beta^۲ + ۳۰\alpha^۲ - ۳۰\beta = ۱۷ \rightsquigarrow ۳\beta^۲ + \alpha^۲ - \beta = \frac{۱۷}{۳۰} \rightsquigarrow \beta^۲ + \alpha^۲ + \beta^۲ - \beta = \frac{۱۷}{۳۰}$

$\beta^۲ + \alpha^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۱^۲ - ۲(\frac{-b}{a}) = ۱ + \frac{۲b}{a}$

$a\beta^۲ - a\beta - b = ۰ \rightsquigarrow a\beta^۲ - a\beta = b \rightsquigarrow \beta^۲ - \beta = \frac{b}{a}$

$۱ + \frac{۲b}{a} + \frac{b}{a} = ۱ + \frac{۳b}{a} = \frac{۱۷}{۳۰} \rightsquigarrow \frac{۳b}{a} = \frac{۱۷-۳۰}{۳۰} = \frac{-۱۳}{۳۰} \rightsquigarrow \frac{b}{a} = -\frac{۱}{۳۰} \rightarrow b = -\frac{a}{۳۰}$

$b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۴a(-b) = a^۲ + ۴ab = a^۲ + ۴a(-\frac{a}{۳۰}) = a^۲ - \frac{۱}{۵}a^۲ = \frac{۴}{۵}a^۲$

$\frac{\sqrt{\frac{۴}{۵}a^۲}}{|a|} = \frac{\frac{۲|a|}{\sqrt{۵}}}{|a|} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \rightsquigarrow \boxed{\frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}$

Subject

Year . Mont . Day . ( )

(۸)

$\frac{-۵+۱}{۲} = \frac{-۴}{۲} = -۲ \rightarrow (-۲, -\frac{۱}{۲})$ است

$y = ax^۲ + bx + \frac{۳}{۲} \rightarrow y = ax^۲ + ۴ax + \frac{۳}{۲}$

$\frac{-b}{۲a} = -۲ \rightsquigarrow b = ۴a \rightarrow ۴ \times \frac{۱}{۴} = ۲$

$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴ \times a \times \frac{۳}{۲} - ۱۶a^۲}{۴a} = \frac{۳}{۲} - ۴a = -\frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۴a \rightarrow ۲ = ۴a \rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

$y = \frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{(۱, \beta)} \beta = \frac{۱}{۲} \times ۱^۲ + ۲ \times ۱ + \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲} + ۲ + \frac{۳}{۲} = \frac{۶}{۲} + ۲$

$= ۳ + ۲ = ۴ \rightarrow \boxed{\beta = ۴}$

(۹)

$x^۲ + ۹x + a = ۰ \quad \alpha < \beta < ۰$

جمع: $\frac{-۹}{۱} = -۹$

ضرب: $\frac{a}{۱} = a$

$۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = (-۹)^۲ - ۲a = ۳۹ - ۲a$

$۲\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = ۲(۳۹ - ۲a) = ۷۲ - ۴a$

$b^۲ - ۴ac = ۳۹ - ۴ \times ۱ \times a = ۳۹ - ۴a$

$\frac{-۹ \pm \sqrt{۳۹ - ۴a}}{۲} = \frac{-۹ \pm ۲\sqrt{۹ - a}}{۲} = -۴ \pm \sqrt{۹ - a}$ ریشه کوچکتر $\rightarrow \alpha = -۴ - \sqrt{۹ - a}$

$\alpha^۲ = ۹ + |۹ - a| + ۹\sqrt{۹ - a} = ۹ + ۹ - a + ۹\sqrt{۹ - a} = ۱۸ - a + ۹\sqrt{۹ - a}$

$۷۲ - ۴a + ۱۸ - a + ۹\sqrt{۹ - a} = ۹۰ - ۵a + ۹\sqrt{۹ - a} = ۸۵ + ۱۲\sqrt{۲}$

$۵ - ۵a + ۹\sqrt{۹ - a} = ۱۲\sqrt{۲}$

$\rightarrow ۹(۲\sqrt{۲}) = ۹(\sqrt{۸})$ $\rightarrow \boxed{a = ۱}$

$\{ a = ۱$

$\alpha - \alpha + ۹\sqrt{۹ - ۱} = ۹\sqrt{۸} = ۹(۲\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$

Subject

Year . Mont . Day . ( )

$۳۶x^۲ - (m+۱۲)x + ۱ = ۰ \rightsquigarrow \frac{۱}{۳۶}$ $\frac{m+۱۲}{۳۶}$ (۱۰)

$\sqrt{\frac{۱}{\alpha}} + \sqrt{\frac{۱}{\beta}} = ۵ \rightsquigarrow \left(\sqrt{\frac{۱}{a}} + \sqrt{\frac{۱}{\beta}}\right)^۲ = ۵^۲ \rightsquigarrow \frac{۱}{a} + \frac{۱}{\beta} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} =$

$\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} = \frac{\frac{m+۱۲}{۳۶}}{\frac{۱}{۳۶}} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{۳۶}}} = m + ۱۲ + ۲\sqrt{۳۶}$

$m + ۱۲ + ۱۲ = ۲۵ \rightsquigarrow m + ۲۶ = ۲۵ \rightsquigarrow m = -۱$

$mx^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \rightsquigarrow \frac{۲}{m} = \frac{۲}{-۱} = \boxed{-۲}$