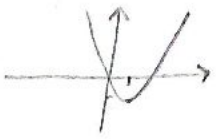
① نقطه رأس

الف) $y = 2x^2 - 2x$

$a > 0 \rightarrow \min$ در $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{-b^2}{4a} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$



ب) $y = -x^2 + 4x$

$a < 0 \rightarrow \max$

$\frac{-b}{2a} \rightarrow \frac{-4}{-2} = 2$

$\frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{-b^2}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$

② نقطه رأس در ناحیه اول و دوم و چهارم

الف) $y = 2x^2 - 5x + 2$

$a > 0 \min$ در $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{5}{4}$

$\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{-(25 - 16)}{8} = \frac{-9}{8}$

ب) $y = -x^2 + 4x - 1$

$a < 0 \max$ در $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-4}{-2} = 2$

$\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{-(16 - 4)}{-4} = 3$

$x^2 - x - 12 = 0$

③ نقطه رأس در ناحیه اول و سوم و چهارم

الف) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{1 - (-12)(1)}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$S = -\frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$P = -12$

ب) $\alpha^2 + \beta^2 \rightarrow S^2 - 2P = 1 - 2(-12) \Rightarrow 25$

ج) $\alpha^3 + \beta^3 \rightarrow S^3 - 3SP \Rightarrow 1 - 3(1)(-12) = 37$

د) $\alpha^3 - \beta^3 \rightarrow (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \rightarrow (\sqrt{13})^3 + 3 \times -12(\sqrt{13}) \rightarrow 13\sqrt{13} - 36\sqrt{13} = -23\sqrt{13}$

$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \sqrt{13}$

④ $y = (x - 2)(x^2 - ax + a)$

$\Delta = 0$: $a^2 - 4a = 0 \rightarrow a(a - 4) = 0$

$\Delta < 0$: $a^2 - 4a < 0 \rightarrow a(a - 4) < 0$

	0		4	
	+	−	+	
	(0, 4)			

$a \neq 0$, $a \neq 4$ ⟶ $(0, 4) - \{a\}$

⑤ $3x^2 - 12x - a = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x = a$

$2x^2 + \beta^2 - 4x = 7$

$3x^2 - 12x = a \rightarrow x^2 - 4x = \frac{a}{3}$

$x^2 + \beta^2 + \frac{a}{3} = 7 \rightarrow 13 + \frac{2a}{3} + \frac{a}{3} = 7 \rightarrow 13 + a = 7 \rightarrow a = -9$

$\frac{a}{\alpha} = \frac{-9}{+3} = -3$ ← جواب

$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \Rightarrow 4 - 2\left(\frac{-9}{3}\right) = 4 + 6 = 10$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{+12}{6} = 2 \rightarrow \frac{9}{3} = 3$

$x = \frac{+9}{3} = 3$

⑥

A: $2a + 2 \rightarrow 2$, $a - 2 \rightarrow -2.5$

B: $7 - 2a$ و $a - 2$ → $-2, 3$

$\frac{3A + 2B}{2} = 2.5$

$7 + 2a + 3a - 2a = b$

$S: \begin{vmatrix} b \\ b - 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$

$y = ax^2 + bx + c$

$\rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow$ $\begin{cases} 25a + 5b + c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \rightarrow$

$a = 3 \rightarrow (1, 2)$

$(9, 2)$

$25a - 10a + c = 3$

$a - 10a + c = 1$ $\Rightarrow$ $-9a + c = 1$

$-16a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{8}$

$1 - \frac{9}{8} = c = \frac{-1}{8}$

$y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$

(۷)

$ax^2 - ax - b = 0$ $\quad \alpha + \beta \to \frac{+a}{a} = 1 \to a\beta^2 - a\beta = b$

$\alpha\beta \to \frac{-b}{a} = \frac{1}{۲۰} \quad a(\beta^2 - \beta) = b \to \beta^2 - \beta = \frac{b}{a}$

$۴۰\beta^2 + ۲۰\alpha^2 - ۲۰\beta = ۱۷$ $\quad a = -۲۰b$

$\div ۲۰ \to ۲\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{۱۷}{۲۰} \to \frac{b}{a} + \beta^2 + \alpha^2 = \frac{۱۷}{۲۰} \to \frac{۳b}{a} = \frac{۱۷-۲۰}{۲۰} \to \frac{۳b}{a} = \frac{-۳}{۲۰} \to \frac{b}{a} = \frac{-1}{۲۰}$

$S^2 - ۲P \to 1 - ۲\frac{-b}{a} = 1 + \frac{۲b}{a}$ $\quad \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + ۴ba}}{a} \Rightarrow \sqrt{\frac{۴۰۰b^2 - ۸۰b^2}{۴۰۰b^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{۳۲۰b^2}{۴۰۰b^2}} \to \boxed{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}$ (۸)

$|^{-۵}_{\beta} \quad |^{1}_{\beta} \to \frac{-۵+1}{۲} = x_S \to \Big| -۲ = \frac{-b}{۲a} = -۲ \to -b = -۴a$

$\quad -\frac{1}{۲} \quad b = ۴a \to \boxed{b = ۲}$

$y = ax^2 + bx + c \to$

$\frac{-1}{۲} = ax^2 + ۴ax + \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{-1}{۲} = ۴a + ۴a \times -۲ + \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{-1}{۲} = -۴a + \frac{۳}{۲}$ ($-۸a$)

$a = \frac{1}{۲}$

$y = \frac{1}{۲}x^2 + ۲x + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{۲} + ۲ + \frac{۳}{۲} \to \boxed{\beta = ۴}$ جواب

(۹)

$x^2 + ۶x + a = 0 \to x_S \Rightarrow \frac{-b}{۲a} \Rightarrow \frac{-۶}{۲} = -۳$ $\quad a = \alpha\beta \to (-۳ - ۲\sqrt{۲})(-۳ + ۲\sqrt{۲}) \Rightarrow$

$\alpha < \beta < 0 \quad -۳ - ۲\sqrt{۲}$ $\quad r = \alpha = x_S - r$ $\quad$ جایگذاری $\quad ۹ - ۸ = \boxed{1}$

$-۳ + ۲\sqrt{۲} \quad \beta = x_S + r \longrightarrow ۳\alpha^2 + ۲\beta^2 = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$\to$ $\quad ۳(-۳-r)^2 + ۲(-۳+r)^2 = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \to \frac{-۶ \pm \sqrt{۳۶ - (۴)(-۱۲\sqrt{۲} - ۴۰)(۵)}}{۱۰}$ $\quad ۲۷ + ۳r^2 + ۱۸r + ۱۸ + ۲r^2 - ۱۲r - ۱۲\sqrt{۲} - ۸۵ = 0$

$\leftarrow ۵r^2 + ۶r - ۱۲\sqrt{۲} - ۴۰ = 0$

$= \frac{-۶ \pm \sqrt{۳۶ + ۲۴۰\sqrt{۲} + ۸۰۰}}{۱۰}$ $\xrightarrow{\text{با ساده کردن}}$ $r = ۲\sqrt{۲}$

(۱۰)

$۳۶x^2 - (m+۱۴)x + 1 = 0 \begin{cases} \to S = \frac{m+۱۴}{۳۶} \quad \alpha + \beta \\ \to P \quad \frac{1}{۳۶} \quad \alpha\beta \end{cases}$

$\sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + ۲\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = ۲۵$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + ۲\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = ۲۵ \to \frac{\frac{m+۱۴}{۳۶}}{\frac{1}{۳۶}} + ۲\sqrt{۳۶} = ۲۵$ (۱۲)

$m + ۱۴ = ۱۳$

$\boxed{m = -1}$

$mx^2 + ۳x + ۲ \xrightarrow[m=-1]{} -x^2 + ۳x + ۲ \to P = \frac{c}{a} = \frac{۲}{-1} = \boxed{-۲}$