۱- x^2-ax+b , $1<x\le 3$, $a+b=?$ — همواره منفی

$x=1 \to 1-a+b=0 \to b-a=-1$

$x=3 \to 9-3a+b=0 \to b-3a=-9$ (جایگذاری)

$\Rightarrow -2a=-8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=3$

$a+b=7$ ✓

۲- $y=((k-2)x+m-1)(x-3x^2)$, $\frac{m}{n}+k=?$, k کسری

$x=-1 \to -1-3n=0 \Rightarrow n=-\frac{1}{3}$

$x=4 \to 4k-8+m-1=0$

$4k+3n+m-8=0$

$k=1, n=-\frac{1}{3} \Rightarrow m-5=0 \Rightarrow m=5$

$\frac{m}{n}+k=\frac{5}{-\frac{1}{3}}+1=-14$ ✓ جواب

x	-1	4
P	$+b$	$+\phi$ $-$

ریشه مضاعف — ریشه ساده

$k-2<0 \Rightarrow k<2$, k کسری

$\Rightarrow k=1$ ✓

۳- $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+4$

$-\frac{1}{2}x^2+2x+4>\frac{7}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}>0 \xrightarrow{\times(-2)}$

$x^2-4x-1<0$

$(x-5)(x+1)<0$

x	-1	5
y	$+\phi$	$-\phi+$

$(-1,5)$

$a=-1$, $b=5$

$b-a=5-(-1)=6$ ✓

البته می‌دانیم که بازه (a,b) می‌تواند زیرمجموعه‌ای از $(-1,5)$ باشد اما برای بیشترین اختلاف ممکن باید خود بازه $(-1,5)$ باشد.

۴- $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, $x>0$

$f(x)=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1)$

x	-1	1	3
$f(x)$	$-\phi$	$+\phi$	$-\phi+$

چون $x>0$ با بازه کوچکتر صفر در نظر می‌گیریم.

زیر محورها ← یعنی منفی باشد. عبارت -1

$(1,3)$: $a \to 1$, $b \to 3$

$\frac{1+3}{2}=2$ ← نقطه‌ی میانی

$f(2)=(-1)(1)(3)=-3$ ✓ جایگذاری

۵- $\frac{(a-1)}{a}x^2+\frac{(a-1)}{b}x+\frac{1}{c}$ → همواره منفی ، a?

اشتراک ① و ② : اشتراکی ندارند $\Rightarrow ① \cap ② = \varnothing$ ✓

$a<0 \Rightarrow a-1<0 \Rightarrow a<1$ ①

$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow a^2-2a+1-4a+4<0$

$a^2-6a+5<0 \Leftarrow (a-1)(a-5)<0$

a	1	5
a^2-6a+5	$+\phi$	$-\phi+$

② $1<a<5$

۶- $\frac{m(m^3+m)}{m-2}$ → همواره مثبت ، m?

m^2+1 نمی‌تواند منفی باشد پس $(m-2)$ می‌ماند که مثبت باشد: $m>2$

$\frac{m^2(m^2+1)}{m-2}>0$

m	$*$	2
$\frac{m(m^2+1)}{m-2}$	$-\phi$	$+\phi+$

$(2,+\infty)$ ✓

-۷

$$\frac{(x^2-x-6)(x-1)^2}{(x^2+x+1)(2-x)^3} \geq 0$$

x^2+x+1: $\Delta = -3$ ریشه ندارد

x	-2	1	2	3
	$+$	$-$	$-$	$+$

ن.ق.ق

$$[-2, 2) \cup [3, +\infty)$$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2 \text{ یا } 3 \leq x\}$$

-۸

$$f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+4}$$

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 1 \Rightarrow \frac{3x^2-2x}{x^2+4} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-2x-x^2-4}{x^2+4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-4}{x^2+4} < 0$$

$\Delta < 0$ ریشه ندارد.

$$\Rightarrow \frac{(x-4)(x+2)}{x^2+4} < 0$$

x	-2	4
$f(x)$	$+$	$-$

$(-2, 4)$

برای بیشترین مقدار: $a = -2$, $b = 4$

$$b - a = 4 - (-2) = 6$$

-۹

$$-1 < \frac{3x^2-4x}{x+1} < 0$$

① $\frac{x(3x-4)}{x+1} < 0$

x	-1	0	$\frac{4}{3}$
	$-$	$+$	$-$

$(-\infty, -1) \cup (0, \frac{4}{3})$

② $0 < \frac{3x^2-4x+x+1}{x+1}$

$$0 < \frac{3x^2-3x+1}{x+1}$$

$3x^2-3x+1$: $\Delta < 0$ ریشه ندارد

x	-1
	$+$

$(-1, +\infty)$

اشتراک ① و ②: $(0, \frac{4}{3})$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < \frac{4}{3}\}$$

-۱۰

$$\frac{x^2-10}{x} < 3 \Rightarrow \frac{x^2-10-3x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-5)(x+2)}{x} < 0$$

x	-2	0	5
	$-$	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty, -2] \cup (0, 5]$$