سوال ۱)

الف) $\begin{cases} 3x-y=9 \\ x+2y=-4 \end{cases} \rightarrow y=3x-9$

$x+2(3x-9)=-4$

$x+6x-18=-4$

$7x=14 \rightarrow x=2$

$y=3(2)-9=-3$

$\frac{x}{y}=\frac{2}{-3}$

ب) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1 \rightarrow \frac{y-x}{xy}=-1 \rightarrow y-x=-xy$

$\frac{3}{x}-\frac{7}{y}=-4 \rightarrow \frac{3y-7x}{xy}=-4 \rightarrow 3y-7x=-4xy$

$\Rightarrow 3y-7x=4(y-x)$

$2y-4x=0$

$y-2x=0 \rightarrow y=2x$

$\frac{x}{y}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

سوال ۲)

$f(a)+2f(2)=3f(1) \rightarrow 2a+2b=3(a+1) \rightarrow 2b=a+3 \xrightarrow{*} 2b=0$

$b=0$

$(1,a+1)=(1,-2) \rightarrow a+1=-2 \rightarrow a=-3$ *

سوال ۳)

$(-1, m^2-3m)=(-1,-2) \rightarrow m^2-3m=-2 \rightarrow m^2-3m+2=0$

$a+b+c=0 \rightarrow m=1$ 　$m=\frac{c}{a}=2$

به ازای هیچ مقداری تابع نمی‌شود

$m=1 \rightarrow \{(-1,-2)(3,3)(2,2)(2,4)(3,3)\}$ غ ق ق

$m=2 \rightarrow \{(-1,-2)(3,3)(3,2)(2,4)(4,9)\}$ غ ق ق

سوال ۴)

الف) تابع نیست (خط موازی محور y‌ها ۲ بار آن را قطع کرده است)

ب) تابع است ✓

ج) تابع نیست X به ازای $x=0$ ۲ عرض مختلف می‌دهد

د) تابع است ✓

سوال ۵)

الف) $y=-\sqrt{x+1}$

تابع است

ب) $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}}=\frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{y_1^2}{1-y_1^2}=\frac{y_2^2}{1-y_2^2} \rightarrow y_1^2-y_1^2y_2^2=y_2^2-y_1^2y_2^2$

$y_1^2=y_2^2 \rightarrow |y_1|=|y_2|$

$y_1=y_2$ (چون طبق * هم علامتند)

تابع است

سوال ۶)

الف) $|y|=x$ 　مثال نقض : $x=4 \begin{cases} y=4 \\ y=-4 \end{cases}$ 　تابع نیست

ب) $y_1^3+3y_1^2+3y_1=y_2^3+3y_2^2+3y_2 \rightarrow y_1^3-y_2^3+3y_1^2-3y_2^2+3y_1-3y_2=0$

$(y_1-y_2)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)+3(y_1-y_2)(y_1+y_2)+3(y_1-y_2)=0$

$(y_1-y_2)(\underbrace{y_1^2+y_1y_2+y_2^2+3y_1+3y_2+3}_{②})=0$

① $y_1-y_2=0 \rightarrow y_1=y_2$

② $y_1^2+y_1(y_2+3)+y_2^2+3y_2+3 \rightarrow \Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(y_2+3)^2-4(1)(y_2^2+3y_2+3)=-3y_2^2-6y_2-3=-3(y_2+1)^2$

$\Delta<0$ ریشه ندارد

$\Delta=0$

$y_2=-1, y_1=-1$

سوال ۷)

$$f(x)=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2+3} \longrightarrow f(\sqrt{3}-2)=\frac{(\sqrt{3}-2+2)^2+1}{(\sqrt{3}-2+2)^2+3}=\frac{3+1}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

سوال ۸)

$$x^3+x-2=4x-1$$
$$x^3-2x-1=0$$
$$x^3+x^2-x^2-2x-1=0$$
$$x^2(x+1)-(x+1)^2=(x+1)(x^2-x-1)=0$$

$x+1=0 \hookleftarrow x=-1$ جان $(-1,-4)$ در فرض سوال

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2\times 1}$$

$y-3x+a=0 \xrightarrow{(-1,-4)} -4-3(-1)+a=0 \longrightarrow a=1$

$x^3+ax+b=y \xrightarrow[a=1]{(-1,-4)} (-1)^3+(1)(-1)+b=-4 \longrightarrow b=-2$

مجموع طول‌ها : $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=1$ ✓

۲ نقطه دیگر

سوال ۹)

$$\underbrace{a+b=2a}_{a=b}=a-2b+1 \qquad 2a=a-2a+1$$
$$3a=1 \longrightarrow a=\frac{1}{3}$$

سوال ۱۰)

تابع همانی : $f(x)=x \longrightarrow \frac{4x^2-ax+c+1}{bx+3}=x \longrightarrow 4x^2-ax+c+1=bx^2+3x$

$$(4-b)x^2-(a+3)x+c+1=0$$

$$\begin{cases} 4-b=0 \longrightarrow b=4 \\ a+3=0 \longrightarrow a=-3 \\ c+1=0 \longrightarrow c=-1 \end{cases}$$

$$a+b+c=-3+4-1=0$$