بهاره سرشاری — کلاس دهم دختر C — تکلیف ۲۸

۱- با توجه به محدوده های تعیین شده پس a در هر دو ضابطه باید جواب یکسان بدهد.

جایگذاری

$$\left.\begin{array}{l} a \to a^2+2a \\ a \to a^2-4 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+2a = a^2-4 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

۲- $f(x) = \dfrac{x^2+a}{2x-b}$ ، $g(x) = 2x+b$ ، $\underset{\text{نقطه تقاطع}}{(2,3)}$ ، $f(1) = ?$

$(2,3) \to g(x) \Rightarrow 3 = 4+b \Rightarrow -1 = b$ که یعنی در هر دو هست.

$f(x) \Rightarrow 3 = \dfrac{4+a}{4+1} \Rightarrow a = 11 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2+11}{2x+1} \Rightarrow f(1) = \dfrac{12}{3} = \boxed{4}$

۳- $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+ax+b}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \underbrace{\{-1,4\}}_{\text{ریشه های مخرج}}$ ، $f(1) = ?$

جایگذاری

$$\left.\begin{array}{l} -1 \to 2-a+b=0 \xrightarrow{\times(4)} 8-4a+4b=0 \\ 4 \to 32+4a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 40+5b=0 \Rightarrow b=-8 \Rightarrow a=-6$$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2-6x-8} \Rightarrow f(1) = \dfrac{5}{-12} = \boxed{-\dfrac{5}{12}}$

۴- $f(x) = \dfrac{x^3-\sqrt{3}}{-4x^2+ax+b}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ، $a+b = ?$

ریشهٔ مخرج ← چون فقط یک ریشه است پس مخرج ریشهٔ مضاعف دارد.

$k(x+1)^2 = -4x^2+ax+b \Rightarrow \underset{-4}{k}x^2 + \underset{-8}{2k}x + \underset{-4}{k} = -4x^2 + \underset{-8}{a}x + \underset{-4}{b}$

$a+b = (-8)+(-4) = \boxed{-12}$

۵- $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)(x^2+mx+1)}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ، حدود m ؟

که مخرج را صفر می کند.

از آنجایی که فقط 1 ریشهٔ مخرج است و آن را صفر می کند. و ما میدانیم $(x-1)$ را داریم. پس پرانتز دیگر یا باید کلاً ریشه نداشته باشد یا باید ریشهٔ مضاعف 1 داشته باشد.

① $\Delta < 0$

$b^2-4ac<0 \Rightarrow m^2-4<0 \Rightarrow -2<m<2$

② $(x-1)^2 = x^2+mx+1$

$x^2-2x+1 = x^2+mx+1 \Rightarrow m=-2$

اشتراک ① و ② : $-2 \leq m < 2 \Rightarrow \boxed{[-2,2)}$

۶- $f(x) = \sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}$ ، $D_f = ?$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x^2}} \to x = \pm\dfrac{1}{2}$ ، $x=0$

زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید همواره بزرگتر مساوی صفر باشد. (نامنفی)

x		$-\frac{1}{2}$		0^*		$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$\dfrac{4x^2-1}{x^2} \geq 0$

$D_f = \boxed{(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)}$

۷- برای اینکه دامنه‌ی تابع مورد نظر $\mathbb{R}$ باشد، از آنجایی که زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج همواره نامنفی است پس m را طوری تعیین می‌کنیم که عبارت ما همواره نامنفی باشد.

$$f(x)=\sqrt{mx^2+2mx+1}$$

① $\Delta \leq 0 \Rightarrow b^2-4ac \leq 0 \Rightarrow 4m^2-4m \leq 0 \Rightarrow 4m(m-1) \leq 0$ ($m=0$ ، $m=1$)

② $a>0 \Rightarrow m>0 \Rightarrow (0,+\infty)$

③ رادیکال‌ها اگر $m=0$ باشد می‌شود $\sqrt{1}=1$ که رادیکال عددی مثبت است و مشکلی ایجاد نمی‌کند

$① \cap ② = (0,1]$

$(0,1] \cup \{0\} = \boxed{[0,1]}$ ← جواب.

{0} هم مربوط به ③

	0		1	
+	0	−	0	+

$[0,1]$

۸-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-1}{2x-1} & x\neq a \\ 4x+k & x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad , \quad g(x)=2x+1 \quad , \quad a+k?$$

a مخرج را صفر می‌کند

a ریشه‌ی $2x-1$ است $\rightarrow 2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

از آنجایی که گفته شده با هم برابرند پس هر مقداری به آنها بدهیم باید خروجی یکسانی هم داشته باشند

$\frac{1}{2} \Rightarrow g(x)=2\times\frac{1}{2}+1=2$

$\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=4\times\frac{1}{2}+k=2+k$

$2=2+k \Rightarrow k=0$

$a+k=\frac{1}{2}+0=\boxed{\frac{1}{2}}$

۹-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^2-4}{3x+2} & x\neq -\dfrac{2}{3} \\ 3ax+2 & x=-\dfrac{2}{3}\end{cases} \quad , \quad g(x)=3x+b \quad , \quad a-b=?$$

$3-(-2)=\boxed{5}$ ← جواب

$$\frac{9x^2-4}{3x+2}=\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x+2}=3x-2 \Rightarrow 3x-2=3x+b \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

می‌توانیم ساده کنیم چون می‌دانیم در این ضابطه $-\frac{2}{3}$ وارد نمی‌شود.
$-\frac{2}{3}$ ریشه‌ی مخرج که عبارت را تعریف نشده می‌کند

باید به ازای ورودی یکسان خروجی یکسان داشته باشند.

$x=-\frac{2}{3}$: $g(x)=-4$ ، $f(x)=-2a+2$

$-4=-2a+2 \Rightarrow \boxed{a=3}$

۱۰-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 2a^2+ax & x=2\end{cases} \quad , \quad g(x)=x+2 \quad , \quad \text{مقادیر } a\text{؟}$$

باید به ازای ورودی یکسان خروجی یکسان داشته باشند.

$x=2$: $g(x)=4$ ، $f(x)=2a^2+2a$

$2a^2+2a=4 \xRightarrow{\div 2} a^2+a=2$

$a^2+a-2=0$

$\Delta=b^2-4ac \quad , \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$: $\boxed{a=1}$ ، $\boxed{a=-2}$

Scanned with CamScanner