(دهم پنجشنبه) C — تکلیف ۴ — ریحانه محبی

۱) الف)

$y=\sqrt{4-\sqrt{2-x}} \rightarrow 2-x \geq 0$, $\boxed{x \leq 2}$ و $4-\sqrt{2-x} \geq 0$

$(\sqrt{2-x})^2 \leq (4)^2$

$2-x \leq 16$

$x \geq 2-16 \rightarrow \boxed{x \geq -14}$

$$\boxed{D_f=\{x\in R \mid -14 \leq x \leq 2\}}$$

ب)

$y=\sqrt{3-\sqrt{x-2}} \rightarrow x-2 \geq 0$, $\boxed{x \geq 2}$ و $3-\sqrt{x-2} \geq 0$

$(3)^2 \geq (\sqrt{x-2})^2$

$9 \geq x-2 \rightarrow \boxed{11 \geq x}$

$$\boxed{D_f=\{x\in R \mid 2 \leq x \leq 11\}}$$

۲) الف)

$y=\sqrt{4-2x^2} \rightarrow 4-2x^2 \geq 0$

$4 \geq 2x^2 \xrightarrow[\div 2]{\text{دو طرف تقسیم}} 2 \geq x^2 \rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{2}$

$|x| \leq \sqrt{2}$

$$\boxed{D_f=\{x\in R \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}}$$

ب)

$y=\sqrt{3|x|-9} \rightarrow 3|x|-9 \geq 0$

$3|x| \geq 9$

$|x| \geq 3 \;<\; \boxed{x \geq 3}$, $\boxed{x \leq -3}$

$$\boxed{D_f=(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)}$$

۳) الف)

$y=\sqrt[3]{\dfrac{|x|+1}{|x|-3}}$

$|x|-3 \neq 0$

$|x| \neq 3 \;<\; x \neq 3$, $x \neq -3$

$$\boxed{D_f=\{x\in R \mid x\neq 3,\ x\neq -3\}}$$

یا

$$\boxed{D_f=(-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)}$$

ب)

$y=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}} \longrightarrow \boxed{x \geq 0}$, $\sqrt{x}-3 \neq 0$

$(\sqrt{x})^2 \neq (3)^2$

$\boxed{x \neq 9}$

$$\boxed{D_f=\{x\in R \mid x \geq 0,\ x\neq 9\}}$$

یا

$$\boxed{D_f=[0,9) \cup (9,+\infty)}$$

۴) الف)

$$y=\frac{\sqrt{۳-|x|}}{|x|+۲}$$

$۳-|x|\geqslant ۰$ و $|x|+۲\neq ۰$

$۳\geqslant |x|$, $|x|\neq -۲$

$\Downarrow$

$\boxed{-۳\leqslant x\leqslant ۳}$

$\boxed{D_f=[-۳,۳]}$

یا

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid -۳\leqslant x\leqslant ۳\}}$

ب)

$$y=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{|x|-۱}$$

$۴-x^۲\geqslant ۰$ و $|x|-۱\neq ۰$

$۴\geqslant x^۲$, $|x|\neq ۱$

$\Downarrow$

$\boxed{-۲\leqslant x\leqslant ۲}$, $\boxed{x\neq ۱}$, $\boxed{x\neq -۱}$

$\boxed{D_f=[-۲,-۱)\cup(-۱,۱)\cup(۱,۲]}$

یا

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid -۲\leqslant x\leqslant ۲,\ x\neq ۱,\ x\neq -۱\}}$

---

۵) الف)

$$y=\frac{x+۱}{\sqrt{x+|x|}}$$

$x+|x|\geqslant ۰$ و $\sqrt{x+|x|}\neq ۰$

$\Downarrow$

برای تمامی اعداد حقیقی برقرار است

$\boxed{x\in R}$

$\Downarrow$

$\boxed{x\geqslant ۰}$

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid x\geqslant ۰\}}$

یا

$\boxed{D_f=[۰,+\infty)}$

ب)

$$y=\frac{۱}{\sqrt{x|x|}}$$

$x|x|\neq ۰$ و $x|x|\geqslant ۰$

$\Downarrow$

$\boxed{x\neq ۰}$, $\boxed{x\geqslant ۰}$ به ازای برقرار است

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid x>۰\}}$

یا

$\boxed{D_f=(۰,+\infty)}$

---

۶) الف)

$$y=\sqrt{۲-[x]}$$

$۲-[x]\geqslant ۰$

$۲\geqslant [x]\rightarrow \boxed{x<۳}$ به ازای برقرار است

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid x<۳\}}$

یا

$\boxed{D_f=(-\infty,۳)}$

ب)

$$y=\frac{۱}{\sqrt{۲-[x]}}$$

$۲-[x]\geqslant ۰$ و $۲-[x]\neq ۰$

$[x]\leqslant ۲$

$\Downarrow$

$\boxed{x<۳}$, $\boxed{[x]\neq ۲}$

$\boxed{D_f=\{x\in R\mid x<۲\}}$

یا

$\boxed{D_f=(-\infty,۲)}$

۷) الف)

$y = \frac{1}{x[x]}$ $\quad x[x] \neq 0$

$x[x] = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{حذف} \\ [x] = 0 \to 0 \leq x < 1 & \text{حذف} \end{cases}$

یا $[0,1)$ حذف

$\boxed{D_f = \{x \in R \mid x \notin [0,1)\}}$

یا

$\boxed{D_f = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)}$

ب)

$y = \frac{1}{\sqrt{-x[x]}}$ $\quad -x[x] \geq 0$ و $-x[x] \neq 0$

هر دو عامل مثبت باشند، $x \geq 1$ و $x < 0$

هر دو عامل منفی باشند، $x < 0$ و $x > 0$

این دو حالت با هم سازگار نیستند، پس: $\boxed{D_f = \varnothing}$

---

۸) الف)

$y = \sqrt{[x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]} \to [x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] \geq 0$ $\quad \boxed{D_f = [\frac{1}{3}, \infty)}$

$2[x + \frac{2}{3}] \geq 1$

$[x + \frac{2}{3}] \geq \frac{1}{2} \to x + \frac{2}{3} \geq 1 \quad x \geq 1 - \frac{2}{3} \quad \boxed{x \geq \frac{1}{3}}$

ب)

$y = \sqrt{[x - \frac{1}{3}] + [-x + \frac{1}{3}]} \to [x - \frac{1}{3}] + [-x + \frac{1}{3}] \geq 0$ $\quad \boxed{D_f = \{x \in R \mid x - \frac{1}{3} \in Z\}}$

حالت ①: $x - \frac{1}{3} \in Z$ ← در این حالت عبارت زیر رادیکال برابر صفر می‌شود پس شرط ≥ 0 را برآورده می‌کند، پس تمام مقادیری که $x - \frac{1}{3}$ را یک عدد صحیح می‌کند جزء دامنه هستند

حالت ②: $x - \frac{1}{3} \notin Z$ ← $[x - \frac{1}{3}] + [-x + \frac{1}{3}] = -1$ ← در این حالت عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود پس شرط ≥ 0 را برآورده نمی‌کند، پس هیچ یک از مقادیری که $x - \frac{1}{3}$ را یک عدد غیر صحیح می‌کند، جزء دامنه نیستند.

---

۹) الف)

$y = \frac{1}{2\sin^2 x - 1}$ $\quad 2\sin^2 x - 1 \neq 0$

$2\sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \to$

حالت ①: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ در ربع اول و دوم:

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

حالت ②: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ در ربع سوم و چهارم:

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

همگی مضرب‌های فرد $\frac{\pi}{4}$ هستند

$\boxed{D_f = \{x \in R \mid x \neq (2n+1)\frac{\pi}{4},\ n \in Z\}}$

ب)

$$y = \frac{\cot x + 1}{\tan x + 1}$$

$\rightarrow \cot_x = \frac{\cos x}{\sin x} \longrightarrow \sin x \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq K\pi}$ $(K \in Z)$

$\rightarrow \tan_x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow \boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + K\pi}$ $(K \in Z)$

$\tan x + 1 \neq 0 \longrightarrow \tan x \neq -1 \rightarrow \boxed{x \neq \frac{3\pi}{4} + K\pi}$: در این دو، ربع دوم و چهارم

$$\boxed{D_f = \{x \in R \mid x \neq \frac{K\pi}{2}, x \neq \frac{3\pi}{4} + K\pi, K \in Z\}}$$

تمام نقاطی که $\sin x = 0$ و $\cos x = 0$ باشد را از دامنه حذف می‌کنیم $\boxed{x \neq \frac{K\pi}{2}}$ و همچنین تمام نقاطی که $\tan x = -1$ یعنی $\boxed{x \neq \frac{3\pi}{4} + K\pi}$ باشد

---

۱۰) الف)

$y = \sqrt{2\sin x - 1}$

$2\sin x - 1 \geq 0$

$2\sin x \geq 1$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \ (30°) \\ x = \frac{5\pi}{6} \ (150°) \end{cases}$

پس مقدار سینوس مساوی یا بزرگتر از $\frac{1}{2}$ در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ امکان پذیر است

$$\boxed{D_f = \{x \in R \mid \frac{\pi}{6} + 2\pi K \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi K, K \in Z\}}$$

ب)

$y = \sqrt{1 - 2\cos x}$

$1 - 2\cos x \geq 0$

$1 \geq 2\cos x$

$\frac{1}{2} \geq \cos x$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \ (60°) \\ x = \frac{5\pi}{3} \ (300°) \end{cases}$

پس مقدار کسینوس کوچکتر یا مساوی یک دوم در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ امکان پذیر است

$$\boxed{D_f = \{x \in R \mid \frac{\pi}{3} + 2K\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2K\pi, K \in Z}$$