۱۹

از پنج فاکتوریل به بعد یکان صفر است.

$(\underbrace{2!+4!}_{2+24=26}+\underbrace{6!+\dots+26!}_{0})$ یکان 6

$(\underbrace{1!+3!}_{1+6=7}+\underbrace{5!+\dots+25!}_{0})$

$6\times7=\boxed{42}\longrightarrow$ یکان

۲

الف) $(4+\sqrt7)^{-\frac14}\times(1+\sqrt7)^{\frac12}\Rightarrow(1+\sqrt7)^2=1+2\sqrt7+7=8+2\sqrt7=2(4+\sqrt7)$ ۲

$4+\sqrt7=\frac{(1+\sqrt7)^2}{2}\longrightarrow(4+\sqrt7)^{-\frac14}\Rightarrow\left(\frac{(1+\sqrt7)^2}{2}\right)^{-\frac14}\Rightarrow2^{\frac14}\times(1+\sqrt7)^{-\frac12}$

$\Rightarrow(1+\sqrt7)^{-\frac12}\times(1+\sqrt7)^{\frac12}\times2^{\frac14}=\boxed{\sqrt[4]{2}}$

ب) $\left(\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}\right)^2=(3-\sqrt5)+(3+\sqrt5)-2\sqrt{(3-\sqrt5)(3+\sqrt5)}=6-2\sqrt4=6-4=2$

عبارت منفی

$\Rightarrow\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}=-\sqrt2\longrightarrow(-\sqrt2)\left(\frac{\sqrt5+\sqrt2}{2+\sqrt{10}}\right)=-\frac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+2}=\boxed{-1}$

الف) $\sqrt{27}=3\sqrt3$, $\sqrt8=2\sqrt2\longrightarrow\frac{2\sqrt2+3\sqrt3}{\sqrt6-5}$ $\quad\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt3\longrightarrow2(\sqrt3-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt3-1}$ ۲

$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt3-1}\times\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3+1}=1+\sqrt3$ $\quad\frac{2\sqrt2+3\sqrt3}{5-\sqrt6}\times\frac{5+\sqrt6}{5+\sqrt6}=\frac{19\sqrt2+19\sqrt3}{19}=\sqrt2+\sqrt3$ ۲

$(\sqrt2+\sqrt3)-(\sqrt3+1)=\boxed{\sqrt2-1}$ $\quad\frac{1}{2-\sqrt3}\times\frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3}=2+\sqrt3$ $\quad(\sqrt3-1)+(2+\sqrt3)=\boxed{2\sqrt3+1}$

ب) $\frac{1-3\sqrt3}{4+\sqrt3}\times\frac{4-\sqrt3}{4-\sqrt3}=\frac{13\sqrt3-13}{13}=\sqrt3-1$

الف) $\sqrt3-\sqrt2=\sqrt2-1$ × $\quad\frac{\sqrt{1+\sqrt3}+\sqrt{\sqrt{4}-1}}{\sqrt3-1}\times\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2+1}=\frac{\sqrt6(\cancel{\sqrt2+1})}{(\sqrt2-1)(\cancel{\sqrt2+1})}=\sqrt6(\sqrt2+1)$ ۱

$\sqrt6(\sqrt2+1)-2=\boxed{2\sqrt{\cancel{3}+\cancel{\sqrt6}}-2}$

ب) $\sqrt[12]{2^8}\times3\sqrt[4]{2}\times\sqrt[12]{2^{13}}=\sqrt[12]{2^{21}}\times3\sqrt[4]{2}=3\sqrt[4]{2^8}=3\sqrt{2^4}$ ۴

$3\times4=\boxed{12}$

عبارت های فاکتور گیری شده مانند الگوی هندسی می‌مانند

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)}=\frac{3^x\times\frac{3^6-1}{3-1}=3^x\times\frac{728}{2}=3^x\times364}{2^{x-2}(2^6-1)=2^{x-2}\times(63)}=\frac{364\ 3^x}{63\ 2^{x-2}}$$ ۲

$$\frac{364}{63}=\frac{52}{9}\times\frac{3^x}{2^{x-2}}=\frac{52}{9}\times4\times\left(\frac32\right)^x=\frac{208}{9}\left(\frac32\right)^x=52$$ ۵

$$\Rightarrow\left(\frac32\right)^x=52\times\frac{9}{208}=\frac94\Rightarrow\left(\frac32\right)^x=\frac94\Rightarrow\boxed{x=2}$$

$\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲}=a$ $\quad b=\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲}$ ۲

$(a-b)^۴(a+b)^۴=t(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow (a^۲-b^۲)^۴ \Rightarrow \left(\left(\sqrt{\sqrt{۶}-۲}-\sqrt{\sqrt{۶}+۲}\right)^۲\right)^۲$

$(۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲=t(۲-\sqrt{۳})$ ۶

$۲۴+۸-۸\sqrt{۱۲}=t(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow ۳۲-۱۶\sqrt{۳}=۱۶(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow t=\boxed{۱۶}$

$a+\frac{۱}{a}=x$ $\quad (x+\sqrt{۲})^۲(x-\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow (x^۲-۲)^۲$ $\quad ۷-۴\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^۲$ ۲

$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=a$ $\quad \sqrt{\sqrt{۳}+۲}=\frac{۱}{a}$ $\quad x=a+\frac{۱}{a}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

$x^۲=(۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=۴+۲\sqrt{۱}=۶$ ۷

$\Rightarrow (x^۲-۲)^۲=(۶-۲)^۲=۱۶ \Rightarrow ۲^۴ \longrightarrow t=۴$

$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}} \Rightarrow \sqrt[۵]{۲^۲\sqrt[۳]{۲^۴}} \Rightarrow \sqrt[۱۵]{۲^{۱۰}} \Rightarrow \sqrt[۳]{۲^۲}\times\sqrt[۳]{۲^۴}$ ۲

$A=\sqrt[۳]{۲^۶}$ $\quad ۲A=۲\sqrt[۳]{۲^۶} \Rightarrow \sqrt[۳]{۲^۹}$

$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=\left(\frac{۱}{۲A}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲^۹}}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\boxed{\frac{۱}{۲}}$ ۸

$(۲۷a)^{\frac{۱۵}{۷}}=\sqrt[۷]{a}$ $\quad a^{\frac{۱}{۷}}=(۲۷a)^{\frac{۱۵}{۷}} \Rightarrow a^{-۲}=۲۷$ $\quad a=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ ۲

$\frac{۱}{\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}}-۳=\frac{۳\sqrt{۳}-۳}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{۱+\sqrt{۳}}\times\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۳(۴-۲\sqrt{۳})}{۲}$ ۹

$\Rightarrow ۶-۳\sqrt{۳}$

$\sqrt{x+a}=A$ $\quad \sqrt{x-۴}=B$ ۲

$A-B=۲$

$(A-A)(B-B)=۴+a$

$A^۲-B^۲=(x+a)-(x-۴)=۴+a$

$۲(A+B)=۴+a \Rightarrow A+B=\frac{۴+a}{۲}$ $\quad A+B-۲=\frac{۴+a}{۲}-۲=\frac{a}{۲}$ ۱۰

$\frac{a}{۲}$

۴ الف)

$$\frac{\overbrace{\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}^{A}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} - 2 = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} - 2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\right) - 2 =$$

$$A^2 = 2\sqrt{3}+2\sqrt{2} \rightarrow A = \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{2}\,\cancel{\sqrt{}}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\cancel{2}} = \sqrt{6}+2-2 = \boxed{\sqrt{6}}$$