۱

الف) $a>0$ ← دهنه دارد

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$ $y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{(-4)^2 - 4(2)(1)}{8} = 1$

$(1, -1)$

ب) $a<0$ ← دهانه دارد

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{(9) - 4(-2)(-5)}{4(2)} = -\frac{31}{8}$

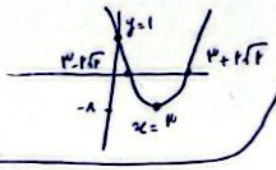
$\left(\frac{3}{4}, -\frac{31}{8}\right)$

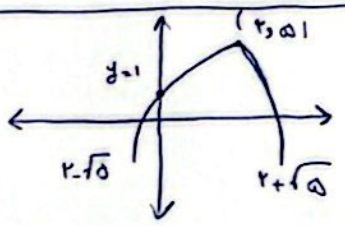
۲

$y = x^2 - 4x + 1$ راس $x = \frac{4}{2} = 2$ راس $y = -3$ عرض از مبدا $x=0 \Rightarrow y=1$

$\Delta = 16 - 4 = 12$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{12} + 4}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$





ب) $-x^2 + 4x + 1$ $x_S = \frac{-4}{2(-1)} = 2$ $y_S = \frac{-\Delta}{4a} = 5$ تقارن $\Rightarrow x = 2, y = 5$ $a<0$ ← دهانه رو به پایین

$x=0 \Rightarrow y=1$ ← عرض از مبدا $\Delta = 16 + 4 = 20$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

۳

$4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ⟵ یکی از عوامل حاصله $\rightarrow x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x^2 - x - 2)(4x + a) = 4x^3 + kx^2 - 9x - 2$

$4x^3 + (a - 4)x^2 + (-a - 8)x - 2a$ ⟵ $a - 4 = k$ $-a - 8 = 9$ $-2a = -2$

$a = 1$

$a - 4 = k \rightarrow k = 1 - 4 = \boxed{-3}$

۴

$x^2 - 3mx + m = 0$ $a = 1$ $b = -3m$ $C = m$

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ⟵ $\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3m)^2 - 4(1)(m) = 9m^2 - 4m$

$\sqrt{9m^2 - 4m} = 1$ $9m^2 - 4m = 1$ $9m^2 - 4m - 1 = 0$ $m = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{18} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}$

$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow c = -m \Rightarrow a = 2 \rightarrow \alpha\beta = \frac{-m}{2} \rightarrow -\left(\frac{1}{2} \times \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}\right) = -\frac{2 \pm \sqrt{13}}{18}$

۵

تابع اول $\Rightarrow x=1 \rightarrow 2(1)^2 - (m+2)(1) + m = 0$ ✓ پس یک ریشه دیگر $\rightarrow x_2 = \frac{m}{2}$ $(1,0), \left(\frac{m}{2}, 0\right), (0, m)$

سه رأس مثلث

ارتفاع $= m$ قاعده $= |1 - \frac{m}{2}|$ مساحت $= \frac{1}{2}$ × ارتفاع × قاعده $= \frac{1}{2}|1 - \frac{m}{2}|m = \frac{3}{4}$

$|m - \frac{m^2}{4}| = 3$

حالت ۱ $m \leq 2 \rightarrow m(2 - m) = 3 \Rightarrow 2m - m^2 = 3 \rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0$ $\Delta = 4 - 4(1)(3) < 0$

حالت ۲ $m > 2 \rightarrow m(m-2) = 3 \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \rightarrow (m-3)(m+1) = 0$

$m = -1$ ← جواب نداره

$\boxed{m = 3}$ ✓

$x_G = \frac{m}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

۶

$a>0$ سهمی

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 28a = 4(2a)$

$\sqrt{4(2a)} = 2a$

$a = \frac{7 \pm 2a}{4}$ → $a=2$ ✓ ; $a = -\frac{9}{8}$ ✗ → $a>0$ زیرا a باید

$y_{min} = a\left(-\frac{3}{2a}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2a}\right) + a$

$= -\frac{9}{4a} + a$ → $y_{min} = -\frac{9}{4a} + a$

$y = \frac{7}{8} = -\frac{9}{4a} + a$ → طبق صورت سوال

$8a^2 - 8 = 7a$ → $8a - 8 - 7a = 0$

یک مقدار

۷

$x^2 - (a+1)x + a = 0$ → $x = 1$ و 3

$S = a+1 =$

$P = \frac{c}{a} = a = n(n+1) = 2n + n^2$

ریشه‌ها $= n, n+2$

$n + (n+2) = a+1$

$a = 2n+1$ → $2n + n^2 = 2n+1$

$n=1$ $a=2$

$x^2 - (2a+1)x + b = 0$ → $a=2$ → $x^2 - 10x + b$

$P = \frac{c}{a} = \frac{b}{1}$ $S = 10$

ریشه‌ها $= m, m+2$

$m(m+2) = 10$

$2m + 2 = 10$

$m = 4$ ریشه‌ها: $4, 6$

$P_2 - P_1 = (4\times6)(4\times1) = 24 - 4 = 21$

۸

$y = -ax^2 + ax + 2$

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-A}{2(B)} = \frac{1}{4}$

$y = -a\left(\frac{1}{4}\right)^2 + a\left(\frac{1}{4}\right) + 2$

$= -\frac{a}{8} + \frac{a}{4} + 2$

$= \frac{a}{8} + 2$ $\left(\frac{1}{4}, \frac{a}{8} + 2\right)$

$y = 2bx^2 - bx - 1$

$x_S = \frac{-(-b)}{2(2b)} = \frac{b}{4b} = \frac{1}{4}$

$y = 2b\left(\frac{1}{16}\right) - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1$

$= -\frac{b}{8} - 1$ $\left(\frac{1}{4}, -\frac{b}{8} - 1\right)$

جایگذاری $x = \frac{1}{4}$ در معادله اول $\Rightarrow y = 2b\left(\frac{1}{4}\right) - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1$

در معادله ۲ $= \frac{b}{2} - \frac{b}{2} - 1 = -1$

جایگذاری $\frac{1}{4}$ در معادله اول

$\Rightarrow y = -a\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{4}\right) + 2$

$= -\frac{a}{16} + \frac{a}{4} + 2$

$a = -12$ → $-\frac{-12}{16} + \frac{-12}{4} + 2 = -$

$\frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} = -\frac{b}{8} - 1$

$b = -4$

$\frac{a}{4} + 2 = -1$ → $a = -12$ → $a - b = 4$

۹

ریشه‌ها α, β → $y = 25ax^2 + 4x + \beta$ $\alpha + \beta = -\frac{4}{25a}$ $\alpha\beta = \frac{\beta}{25a}$ $\beta = 25a\alpha\beta \div \beta \Rightarrow$

$25a\alpha = 1$ → $\alpha = \frac{1}{25a}$ $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2a} = -\frac{4}{10a}$ → $x_S = \frac{4}{10 \times \frac{1}{25a}}$

$x_S = -2\alpha$

$\alpha < \beta$ → $\alpha + \beta = -\frac{4}{25a} \Rightarrow 25a\alpha = 1$ → a با α هم علامت

$\alpha < 0$ $\beta > 0$

$-2\alpha > 0$ → x_S بالای محور

سهمی در ناحیه ۴ قرار دارد

۱۰

$a+b = \frac{-b}{a}$ $a^2 + b^2 - 12$ $ab = a + b - 1$ → $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

→ $a+b = (a+b)^2 - 2ab - 12$ $\xrightarrow{ab = a+b-1}$ $a+b = (a+b)^2 - 2(a+b-1) - 12$

$\xrightarrow{a+b=S}$ $S^2 - 2(S-1) - 12 = S$ → $S^2 - 3S - 10 = 0 \Leftrightarrow (S-5)(S+2)$

α

$a+b = S = 5$ → چون a و b طبیعی‌اند