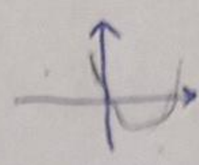
آیدین اشرفی - گروه A

۱۹٫۷۵

الف) $y = 3x^2 - 2x$

$x(3x-2)=0$

$x_1=0 \quad , x_2=\frac{2}{3}$



$a>0 \quad -\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}>0$

از ۳ می‌گذرد ✓

ب) $y = -x^2 + 4x$

$x(4-x)=0$

$x_1=0 \quad x_2=4$

$a<0 \quad -\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2$

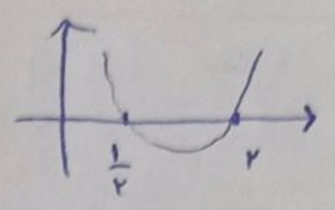
از ۲ می‌گذرد. ✓

---

۴) الف) $y = 2x^2 - 5x + 2$

$(x-\frac{1}{2})(x-\frac{4}{2})=0$

$x_1=\frac{1}{2} \quad , x_2=2$

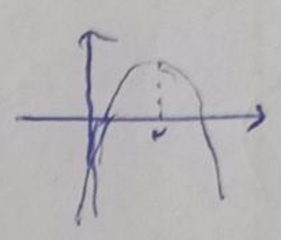


۲) از ۱، ۲، ۴ می‌گذرد. ✓

ب) $y = -x^2 + 4x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 > 0$

$x=2 \quad , \quad a<0$



از ۱، ۳، ۴ می‌گذرد ✓

---

۲۷) ۲

$x^2 - x - 3 = 0$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{1}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ✓

$\Delta = 1 + 12 = 13$

ب) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (\frac{-b}{a})^2 - \frac{2c}{a} = 1 + 2\times\frac{3}{1} = 7$ ✓

ج) $\alpha^3+\beta^3 = S^3 - 3PS = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 1 - 3(-3)(1) = 1+9 = 10$ ✓

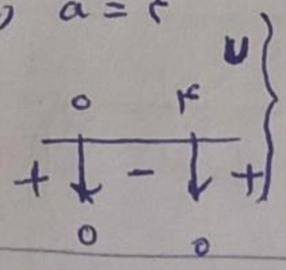
د) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta) = (\sqrt{13})^3 + 3(-3)\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$ ✓

---

۴) ۲

$x^2 - ax + a$ ثابت $\rightarrow (x-2)^2 = x - 4x + 4 \Rightarrow a = 4$

ثابت $\rightarrow \Delta < 0 \quad a^2 - 4a < 0$



$\Rightarrow a \in (0,4]$ ✓

---

۵) ۲

$\alpha+\beta = \frac{12}{3} = 4 \qquad \alpha\beta = \frac{-a}{3}$

$2\alpha^2+\beta^2 - 4a = 7 \xrightarrow{\beta = 4-\alpha}$

$2\alpha^2 + (4-\alpha)^2 - 4\alpha = 7$

$2\alpha^2 + 16 + \alpha^2 - 8\alpha - 4\alpha = 7$

$3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0$

$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

$(\alpha-3)(\alpha-1)=0$

$\alpha = 1 \quad$ یا $\quad \alpha = 3$ ← ریشهٔ بزرگ‌تر

$\alpha\beta = 3 = \frac{-a}{3}$

$\Rightarrow a = -9$ ✓

$\frac{\alpha}{\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}} = \frac{-9}{3} = -3$ ✓

۶ (۲)

$a \in N \Rightarrow a = ۳$

$۳,۵ > a$

$۳,۵ > a > ۲$

$a > ۲ , \quad a-۲ \in N$

$V - ۲a \in IN \rightarrow \begin{cases} V-۲a > ۰ \\ a-۲ > ۰ \end{cases}$

$S(۵, ۳)$

$\frac{V - ۲a + ۲a + ۳}{۲} = b \Rightarrow \underline{b = a}$

$y = a(x-۵)^۲ + ۳$

$\xrightarrow[y=۱]{x=۱} ۱ = a(۱-۵)^۲ + ۳ \quad a = -\frac{۱}{۸}$

$y = -\frac{۱}{۸}(x-۵)^۲ + ۳ \Rightarrow c = -\frac{۲۵}{۸} + ۳ = \frac{-۱}{۸}$ ✓

فاصله $= \frac{۱}{۸}$

---

۷ (۲)

$(\beta^۲ + \alpha^۲) + (\beta^۲ - \beta) = \frac{۱۷}{۲۰} \Rightarrow$

$۲\beta^۲ + \alpha^۲ - \beta = \frac{۱۷}{۲۰}$

$\alpha + \beta = ۱ \rightarrow \beta = ۱ - \alpha$ ✓

$(\beta + \alpha)^۲ - ۲\alpha\beta + \beta(\beta - ۱) = \frac{۱۷}{۲۰}$

$۱ - ۲\alpha\beta + \beta(-\alpha) = \frac{۱۷}{۲۰}$

$۱ - ۳\alpha\beta = \frac{۱۷}{۲۰}$

$۱ - ۳\alpha(۱-\alpha) = \frac{۱۷}{۲۰}$

$۱ - ۳\alpha + ۳\alpha^۲ = \frac{۱۷}{۲۰}$

$\alpha^۲ - \alpha + \frac{۱}{۲۰} = ۰$ ✓

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۱} = ۲\sqrt{۵}\,\frac{\sqrt{۱-\frac{۱}{۵}}}{۱} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

دقت!

---

۸ (۲)

$y = a(x+۲)^۲ - \frac{۱}{۲}$

$x = \frac{-۵+۱}{۲} = -۲$

$\frac{۳}{۲} = a(۰+۲)^۲ - \frac{۱}{۲} \quad ۴a - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad a = \frac{۱}{۲}$

$y = \frac{۱}{۲}(x+۲)^۲ - \frac{۱}{۲} \quad B = \frac{۱}{۲}(۱+۲)^۲ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{B = ۴}$ ✓

---

۹ (۲)

$x^۲ + ۹x + a = ۰ \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -۹ \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = a$

α		β		۰
$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

$x = \frac{-۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۴a}}{۲}$

$\alpha = -۴ - \sqrt{۹-a}$
$\beta = -۴ + \sqrt{۹-a}$
} جای‌گذاری در رابطه داده شده ⇒ $۳(-۴-\sqrt{۹-a})^۲ + ۲(-۴+\sqrt{۹-a})^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

تغییر متغیر $\sqrt{۹-a} = t$

$۳(-۴-t)^۲ + ۲(-۴+t)^۲ = ۴۵ + ۹t + ۵t^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$

از تساوی دو طرف عبارتی بدست می‌آید: $t = ۲\sqrt{۲}$

$\sqrt{۹-a} = ۲\sqrt{۲} \Leftarrow ۹-a = ۸ \Leftarrow \boxed{a = ۱}$ ✓

---

۱۰ (۲)

$\frac{۱}{\sqrt{a}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = ۵ \quad \left(\frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{a}}{\sqrt{a\beta}}\right)^۲ = ۲۵ \quad \frac{a + \beta + ۲\sqrt{a\beta}}{a.\beta} = ۲۵ \quad \frac{\frac{m+۱۶}{۳۶}}{\frac{۱}{۳۶}} + \frac{۱}{۳} = ۲۵$

$\boxed{m = -۱}$ ✓ $\quad mx^۲ + ۲x + ۲ = ۰ \xrightarrow{m=-۱} -x^۲ + ۲x + ۲ = ۰$

حاصل ضرب ریشه‌ها: $\frac{c}{a} = x_۱ x_۲ = -۲$ ✓