۱۵,۲۵

آزاده حدادی

۲)

الف) $y = 3x^2 - 2x \to a > 0 \to$ از ناحیه ی اول و دوم می گذرد.

x		0		$\frac{2}{3}$	
y	+	0	-	0	+

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(3)} = \frac{1}{3} \to 3(\frac{1}{3})^2 - 2(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} \to V(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \to$ از ناحیه ی چهارم می گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y>0$ پس نمودار هرگز از ناحیه ی سوم نمی گذرد. ✓

ب) $y = -x^2 + 4x \to a < 0 \to$ از ناحیه ی سوم و چهارم می گذرد.

x		0		4	
y	-	0	+	0	-

$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \to -(2)^2 + 4(2) = 4 \to V(2, 4) \to$ از ناحیه ی اول می گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y<0$ پس نمودار هرگز از ناحیه ی دوم نمی گذرد. ✓

۳)

الف) $y = 2x^2 - 5x + 2 \to a > 0 \to$ از ناحیه ی اول و دوم می گذرد.

x		$\frac{1}{2}$		2	
y	+	0	-	0	+

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4} \to y_{min} = 2(\frac{5}{4})^2 - 5(\frac{5}{4}) + 2 = \frac{50}{16} - \frac{100}{16} + \frac{32}{16} = \frac{-18}{16} \to V(\frac{5}{4}, \frac{-18}{16})$

از ناحیه ی چهارم می گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y>0$ پس نمودار هرگز از ناحیه ی سوم نمی گذرد. ✓

ب) $y=-x^2+4x-1 \rightarrow a<0 \rightarrow$ از ناحیه سوم و چهارم می‌گذرد.

x		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

$x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2 \rightarrow y_{max}=-(2)^2+4(2)-1=-4+8-1=3 \rightarrow V(2,3) \rightarrow$ از ناحیه اول می‌گذرد.

چون به ازای $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ داریم $y>0$ پس هرگز از ناحیه دوم نمی‌گذرد. ✓

$S=\frac{-b}{a}=1 \ , P=\frac{c}{a}=-3$

۳- (۲)

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{S}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}=\frac{S}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{S^2-2P-2P}}=\frac{S}{\sqrt{S^2-4P}}=\frac{1}{\sqrt{1+12}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$ ✓

ب) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=1-2(-3)=7$ ✓

ج) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS=1-3(-3)(1)=10$ ✓

د) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\sqrt{S^2-4P})(S^2-2P+P)=(\sqrt{13})(1+3)=4\sqrt{13}$ ✓

۴- (۱)

$(x-2)(x^2-ax+a) \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=2 \\ \text{ریشه‌های } x^2-ax+a : \xrightarrow[\text{یک ریشه}]{x=2} (2)^2-a(2)+a=0 \rightarrow 4-a=0 \rightarrow \boxed{a=4} \end{cases}$ ✓

۵- (۲/۵)

$3x^2-12x+a=0$

$2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-12)}{3}=4$

$P=\frac{c}{a}=\frac{a}{3}$

$\rightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha^2-4\alpha=7 \rightarrow S^2-2P+(-\frac{a}{3})=7 \rightarrow 16-\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}=7$

$\rightarrow -a=7-16 \rightarrow a=9 \rightarrow 3x^2-12x+9=0 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$-a \rightarrow a=-9$

$\rightarrow \frac{a}{\text{ریشه‌ی بزرگتر معادله}}=\boxed{\frac{-9}{3}=-3}$

۶- ۰

?

۴- حالت دوم: x^2-ax+a ریشه نداشته باشد!

$\Delta<0 \rightarrow a^2-4a<0$

$0<a<4$

$\xrightarrow{\cap}$ جواب $0<a\leq 4$

$P=\frac{-b}{a}\ ,\ S=\frac{-(-a)}{a}=1$

۷-　(۲)

$40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17 \xrightarrow{\div 20} 2\beta^2+\alpha^2-\beta=\frac{17}{20} \to \alpha^2+\beta^2+\beta^2-\beta=\frac{17}{20}$ (I)

$ax^2-ax-b=0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\beta\ \text{ریشه‌ی}} a\beta^2-a\beta-b=0 \to a(\beta^2-\beta)=b \to \beta^2-\beta=\frac{b}{a}$ (II)

$(I),(II) \longrightarrow S^2-2P+\frac{b}{a}=\frac{17}{20} \xrightarrow{\frac{b}{a}=-P} S^2-3P=\frac{17}{20} \to 1+\frac{3b}{a}=\frac{17}{20}$

$\longrightarrow \frac{3b}{a}=\frac{-3}{20} \longrightarrow \frac{b}{a}=-\frac{1}{20} \to P=\frac{1}{20} \longrightarrow y=x^2-Sx+P=0 \to x^2-x+\frac{1}{20}=0$

$\longrightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4(1)(\frac{1}{20})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\ ,\ |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{\frac{4}{5}}}{|1|}=\sqrt{\frac{4}{5}}$ ✓

۸-　(۲)

$(-5,\beta),(1,\beta)\qquad y=ax^2+bx+c$

عرض الرأس $=\frac{-\Delta}{4a} \longrightarrow \frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{b^2-4ac}{4a}=\frac{1}{2}$ (I)

$\xrightarrow{x=0} a(0)^2+b(0)^2+c=\frac{3}{2} \longrightarrow c=\frac{3}{2}$ (II)

$\left.\begin{array}{l} a(1)^2+b(1)^2+\frac{3}{2}=\beta \\ a(-5)^2+b(-5)+\frac{3}{2}=\beta \end{array}\right\} \longrightarrow a+b=25a-5b \longrightarrow 24a=6b \xrightarrow{\div 24} a=\frac{1}{4}b$ (III)

$(I),(II),(III) \longrightarrow \frac{b^2-4(\frac{1}{4}b)(\frac{3}{2})}{4(\frac{1}{4}b)}=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{b^2-\frac{3}{2}b}{b}=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{b(b-\frac{3}{2})}{b}=\frac{1}{2}$

$\longrightarrow b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \longrightarrow a=\frac{1}{2} \longrightarrow y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}(1)^2+2(1)+\frac{3}{2}=4 \longrightarrow \beta=4$ ✓

۹-　(۰٫۵)

$y=x^2+6x+a\qquad P=a\ ,\ S=6$

$\alpha<\beta<0 \longrightarrow P>0\ ,\ S<0$

$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+18$

$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)+\frac{5}{2}(\alpha^2+\beta^2)}_{3\alpha^2+2\beta^2}=12\sqrt{2}+18 \longrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)$

$=(+\sqrt{S^2-4P})(S)+(S^2-2P)=(-\sqrt{36-4a})\times(-6)+36-2a$

$=+6\sqrt{36-4a}+36-2a=12\sqrt{2}+18$

$\longrightarrow 6\sqrt{36-4a}=12\sqrt{2} \xrightarrow{\div 6} \sqrt{36-4a}=\sqrt{8} \xrightarrow{(\ )^2} 36-4a=8 \to 4a=36-8=28$

$\longrightarrow$ ~~$a=7$~~

$P = \frac{1}{36}$

$S = \frac{m+14}{36}$

-10

(2)

$y = 36x^2 - (m+14) + 1 = 0$

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{\frac{m+14}{36} + 2\sqrt{\frac{1}{36}}}}{\sqrt{\frac{1}{36}}} = 5 \xrightarrow{(\ )^2} \frac{\frac{m+14}{36} + \frac{2}{6}}{\frac{1}{36}} = 25$$

$$\frac{m+14}{36} + \frac{12}{36} = \frac{25}{36} \longrightarrow m = -1 \longrightarrow -x^2 + 3x + 2 = 0 \longrightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2 \ ✓$$

4- A و B هم‌عرض‌اند پس طول رأس میانگین آن‌هاست:

$$x_S = b = \frac{7-2a+2a+3}{2} = 5 \rightarrow S(5,3)$$

مولفه‌های A و B طبیعی‌اند:

$7-2a>0 \rightarrow a<3,5$

$2a+3>0 \rightarrow a>-1,5$

$a-2>0 \rightarrow a>2$

$\xrightarrow{\cap} a=3 \quad A(9,1) \quad B(1,1)$

$$y-3 = a(x-5) \xrightarrow{(1,1)} a = \frac{-1}{8} \xrightarrow{\text{معادله سهمی}} y-3 = -\frac{1}{8}(x-5)^2$$

محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها:

$$y-3 = -\frac{1}{8}(0-5)^2 \rightarrow y = -\frac{1}{8}$$

فاصله تا مبدا مختصات ← $\boxed{\frac{1}{8}}$

۹ـ

$$۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = \frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲) + \frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲) = \frac{۵}{۲}(S^۲-۲P) + \frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$\frac{۵}{۲}(S^۲-۲P) + \frac{۱}{۲}S\sqrt{۳۶-۴a} = \frac{۵}{۲}(۳۶-۲a) - \frac{۱}{۲}(-۶)\sqrt{۳۶-۴a} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\underbrace{۹۰-۵a}_{} + \underbrace{۳\sqrt{۳۶-۴a}}_{} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$۸۵ \rightarrow a = ۱$ $\quad$ $۱۲\sqrt{۲} \rightarrow a = ۱$