آزاد حدادی

الف) $y = 3x^2 - 2x \longrightarrow a > 0 \longrightarrow$ از ناحیه‌ی اول و دوم می‌گذرد.

x		0		$\frac{2}{3}$	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(3)} = \frac{1}{3} \longrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \longrightarrow V\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \longrightarrow$ از ناحیه‌ی چهارم می‌گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y>0$ پس نمودار هرگز از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

ب) $y = -x^2 + 4x \longrightarrow a < 0 \longrightarrow$ از ناحیه‌ی سوم و چهارم می‌گذرد.

x		0		4	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \longrightarrow -(2)^2 + 4(2) = 4 \longrightarrow V(2, 4) \longrightarrow$ از ناحیه‌ی اول می‌گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y<0$ پس نمودار هرگز از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد.

الف) $y = 2x^2 - 5x + 2 \longrightarrow a > 0 \longrightarrow$ از ناحیه‌ی اول و دوم می‌گذرد.

x		$\frac{1}{2}$		2	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4} \longrightarrow y_{min} = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 2 = \frac{50}{16} - \frac{100}{16} + \frac{32}{16} = \frac{-18}{16} \longrightarrow V\left(\frac{5}{4}, \frac{-18}{16}\right)$

از ناحیه‌ی چهارم می‌گذرد.

به ازای $x<0$ داریم $y>0$ پس نمودار هرگز از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

ب) $y=-x^2+4x-1 \longrightarrow a<0 \longrightarrow$ از ناحیه سوم و چهارم می‌گذرد.

x		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

$x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2 \longrightarrow y_{max}=-(2)^2+4(2)-1=-4+8-1=3 \rightarrow V(2,3) \longrightarrow$ از ناحیه اول می‌گذرد.

چون برای $x<2-\sqrt{3}$ داریم $y<0$ پس هرگز از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

۳-

$\boxed{S=\frac{-b}{a}=1\ ,\ P=\frac{c}{a}=-3}$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{S}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}=\frac{S}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{S^2-2P-2P}}=\frac{S}{\sqrt{S^2-4P}}=\frac{1}{\sqrt{1+12}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

ب) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=1-2(-3)=7$

ج) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS=1-3(-3)(1)=10$

د) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\sqrt{S^2-4P})(S^2-2P+P)=(\sqrt{13})(1+3)=4\sqrt{13}$

٤-

$(x-2)(x^2-ax+a) \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x=2 \\ \text{ریشه‌های } x^2-ax+a : \xrightarrow[\text{یک ریشه}]{x=2} (2)^2-a(2)+a=0 \rightarrow 4-a=0 \rightarrow \boxed{a=4} \end{cases}$

۵-

$3x^2-12x+a=0$

$2\alpha^2+\beta^2-4\alpha=7$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-12)}{3}=4$

$P=\frac{c}{a}=\frac{a}{3}$

$\longrightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha^2-4\alpha=7 \longrightarrow S^2-2P+(-\frac{a}{3})=7 \rightarrow 16-\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}=7$

$\rightarrow -a=7-16 \rightarrow \underline{a=9} \longrightarrow 3x^2-12x+9=0 \longrightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$\longrightarrow \frac{a}{\text{ریشه‌ی بزرگتر معادله}}=\boxed{\frac{9}{3}=3}$

۶-

?

$P = \frac{-b}{a} \; , \; S = \frac{-(-a)}{a} = 1$

$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \xrightarrow{\div 20} 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{20} \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 - \beta = \frac{17}{20} \; (\mathrm{I})$ -7

$ax^2 - ax - b = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه } \beta} a\beta^2 - a\beta - b = 0 \rightarrow a(\beta^2 - \beta) = b \rightarrow \beta^2 - \beta = \frac{b}{a} \; (\mathrm{II})$

$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \longrightarrow S^2 - 2P + \frac{b}{a} = \frac{17}{20} \xrightarrow{\frac{b}{a} = -P} S^2 - 3P = \frac{17}{20} \rightarrow 1 + \frac{3b}{a} = \frac{17}{20}$

$\rightarrow \frac{3b}{a} = \frac{-3}{20} \rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{1}{20} \rightarrow P = \frac{1}{20} \rightarrow y = x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{20} = 0$

$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(\frac{1}{20}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \; , \; |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{\frac{4}{5}}}{|1|} = \sqrt{\frac{4}{5}}$

$(-5, \beta), (1, \beta) \qquad y = ax^2 + bx + c$

عرض الرأس $= \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{1}{2} \; (\mathrm{I})$ -8

$\xrightarrow{x=0} a(0)^2 + b(0)^2 + c = \frac{3}{2} \rightarrow c = \frac{3}{2} \; (\mathrm{II})$

$\left.\begin{array}{l} a(1)^2 + b(1)^2 + \frac{3}{2} = \beta \\ a(-5)^2 + b(-5) + \frac{3}{2} = \beta \end{array}\right\} \rightarrow a + b = 25a - 5b \rightarrow 24a = 6b \xrightarrow{\div 24} a = \frac{1}{4}b \; (\mathrm{III})$

$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}) \longrightarrow \frac{b^2 - 4(\frac{1}{4}b)(\frac{3}{2})}{4(\frac{1}{4}b)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{b^2 - \frac{3}{2}b}{b} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{b(b - \frac{3}{2})}{b} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) + \frac{3}{2} = 4 \rightarrow \boxed{\beta = 4}$

$y = x^2 + 6x + a \qquad P = a \; , \; S = -6$ -9

$\alpha < \beta < 0 \rightarrow P > 0, S < 0$

$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 18$

$\rightarrow (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2) = 12\sqrt{2} + 18 \rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2)$

$= (-\sqrt{S^2 - 4P})(S) + (S^2 - 2P) = (-\sqrt{36 - 4a}) \times (-6) + 36 - 2a$

$= +6\sqrt{36 - 4a} + 36 - 2a = 12\sqrt{2} + 18$

$\rightarrow 6\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} \xrightarrow{\div 6} \sqrt{36 - 4a} = \sqrt{8} \xrightarrow{(\;)^2} 36 - 4a = 8 \rightarrow 4a = 36 - 8 = 28$

$\rightarrow \boxed{a = 7}$

$$P = \frac{۱}{۳۶}$$
$$S = \frac{m+۱۴}{۳۶}$$

-۱۰

$$y = ۳۶x^۲ - (m+۱۴) + ۱ = ۰$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = ۵$$

$$\longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{\frac{m+۱۴}{۳۶} + ۲\sqrt{\frac{۱}{۳۶}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۳۶}}} = ۵ \xrightarrow{(\,)^۲} \frac{\frac{m+۱۴}{۳۶} + \frac{۲}{۶}}{\frac{۱}{۳۶}} = ۲۵$$

$$\frac{m+۱۴}{۳۶} + \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۲۵}{۳۶} \longrightarrow m = -۱ \longrightarrow -x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \longrightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$