دهم B — ایلیا خاکسار — ۱۸٫۵

۱- $(1+6+0+\dots+0)\times(2+4+0+\dots+0)=7\times6=\boxed{42}$

۲

۲- الف) $\sqrt[4]{(4+\sqrt7)^{-1}}\,\sqrt{1+\sqrt7} \Rightarrow (4+\sqrt7)^{-\frac14}(1+\sqrt7)^{\frac12} \Rightarrow \frac{(1+\sqrt7)^{\frac24}}{(4+\sqrt7)^{\frac14}} = \left(\cancel{\frac{(1+\sqrt7)^2}{4+\sqrt7}}\right)^{\frac14}$

$\Rightarrow 2^{\frac14}=\boxed{\sqrt[4]{2}}$

۲

ب) $\sqrt{3+\sqrt5}=\frac{\sqrt5+1}{\sqrt2} \Rightarrow \frac{\sqrt5-1}{\sqrt2}-\frac{\sqrt5+1}{\sqrt2}=-\sqrt2 \Rightarrow \frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt{10}+2}\times(-\sqrt2)=\boxed{-1}$

۳- الف) $\frac{\sqrt8+\sqrt{27}}{5-\sqrt6}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1} \Rightarrow \frac{2\sqrt2+3\sqrt3}{5-\sqrt6}-\cancel{\frac{2}{\sqrt3-1}}^{\sqrt3+1} \Rightarrow \frac{2\sqrt2+3\sqrt3}{5-\sqrt6}\times\frac{5+\sqrt6}{5+\sqrt6}=\frac{19(\sqrt2+\sqrt3)}{19}=\sqrt2+\sqrt3$

$\Rightarrow \sqrt2+\sqrt3-\sqrt3+1=\boxed{\sqrt2-1}$

۱٫۵

ب) $\frac{3\sqrt3-1}{\sqrt3+4}+\frac{1}{2-\sqrt3} \Rightarrow \frac{1}{2-\sqrt3}\times\frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3}=\frac{2+\sqrt3}{1} \Rightarrow \frac{3\sqrt3-1}{\sqrt3+4}\times\frac{\sqrt3-4}{\sqrt3-4}=1-\sqrt3$

$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt3}=\frac{3\sqrt3-1}{4+\sqrt3}\times\frac{4-\sqrt3}{4-\sqrt3}=\frac{12\sqrt3-9-4+\sqrt3}{13}=\frac{13\sqrt3-13}{13}=\sqrt3-1$

$\Rightarrow 2+\sqrt3+1-\sqrt3 \Rightarrow \boxed{3}$

$(2-\sqrt3)^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt3}\times\frac{2+\sqrt3}{2+\sqrt3}=2+\sqrt3 \longrightarrow \sqrt3-1+2+\sqrt3=2\sqrt3+1$

۴- الف) $(\sqrt{1+\sqrt3}+\sqrt{\sqrt3-1})^2=1+\sqrt3+\sqrt3-1+2\sqrt{(1+\sqrt3)(\sqrt3-1)}=2\sqrt3+2\sqrt2 \Rightarrow \sqrt{2\sqrt3+2\sqrt2}=\sqrt2\sqrt{\sqrt3+\sqrt2}$

$\Rightarrow \sqrt{\sqrt3-\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt3+\sqrt2}} \Rightarrow \sqrt2\sqrt{\sqrt3+\sqrt2}\times\sqrt{\sqrt3+\sqrt2}=\sqrt2(\sqrt3+\sqrt2)=\sqrt6+2 \Rightarrow \sqrt6+2-2=\boxed{\sqrt6}$

ب) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^8}}=2^{\frac{8}{12}}$ $\quad \sqrt[4]{162}=3\times2^{\frac14}$ $\quad \sqrt{4\sqrt[6]{2}}=2^{\frac{13}{12}} \Rightarrow 2^{\frac{8}{12}}\times2^{\frac14}\times3\times2^{\frac{13}{12}}$

$\Rightarrow 2^2\times3=12$

۲

۵- $\frac{3^x(1+3+3^2+\dots+3^5)}{2^x(2^{-2}+2^{-1}+\dots+2^3)} \Rightarrow \frac{3^x}{2^x}\times364\times\frac{4}{63}=52 \Rightarrow \frac{3^x}{2^x}\times364\times\frac{4}{63}\times\frac{1}{52}=1 \Rightarrow \frac{3^x}{2^x}\times\frac49=1$

$\Rightarrow x=2$

۲

۶- $((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲ = (a-b)^۴(a+b)^۴ \Rightarrow (a^۲-b^۲)^۴ \Rightarrow a^۲-b^۲ = \sqrt{\sqrt{۶}-۲} - \sqrt{\sqrt{۶}+۲}$

$\Rightarrow (\sqrt{۶}-۲)+(\sqrt{۶}+۲) = ۲\sqrt{۶} \,,\, (\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲) = ۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲ = ۲۴+۸-۸(۲\sqrt{۳})$

$\Rightarrow ۳۲-۱۶\sqrt{۳} = ۱۶(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow \boxed{t=۱۶}$ ✓

۲

۷- $((a+\frac{۱}{a})^۲-۲)^۲ \Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲ \Rightarrow (a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲ \Rightarrow \sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲} \Rightarrow a^۲ = ۲-\sqrt{۳}$ ✓

$\Rightarrow \frac{۱}{a^۲} = ۲+\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲+\frac{۱}{a^۲} = (۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳}) = ۴ \Rightarrow ۴^۲ = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow \boxed{t=۴}$

۲

★ $(x+y)^۲(x-y)^۲ = (x^۲-y^۲)^۲$

۸- $۲^{\frac{۴}{۳}} \times ۲^{\frac{۶}{۳}} = ۲^{\frac{۱۰}{۳}} \Rightarrow ۲^{\frac{۱۰}{۳}\times\frac{۱}{۵}} = ۲^{\frac{۱۰}{۱۵}} = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}$

$(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = (۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}} \Rightarrow ۲^{\frac{۱۰}{۱۵}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۳۰}{۱۵}} = ۴$ ✓

۲

$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}} = (۲\times۴)^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۱}{۲}$

۹- $a^{\frac{۱}{۷}} = ۲۷\times a^{\frac{۱۵}{۷}} \Rightarrow a = ۳^{\frac{۲۱}{۷}} \times a^{\frac{۲۱}{۷}} \Rightarrow a = ۳a^۳ \Rightarrow ۳a^۳ - a = ۰ \Rightarrow a(۳a^۲-۱) = ۰ \Rightarrow a$: ۰ ، $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ✓

۱

$a^۲ = \frac{۱}{۲۷} \to a = \frac{۱}{\sqrt{۲۷}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}-۳}{\sqrt{۳}+۱} \times \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱} = -۲\sqrt{۳}+۳$

$\to (\frac{۱}{a}-۳) = ۳\sqrt{۳}-۳ = ۳(\sqrt{۳}-۱) \to \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱} \times \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{۳(۱+۳-۲\sqrt{۳})}{۳-۱} = \frac{۳(۴-۲\sqrt{۳})}{۲} =$

$۳(۲-\sqrt{۳}) = ۶-۳\sqrt{۳}$

۱۰- $A = \sqrt{x+۵} \quad B = \sqrt{x-۴} \quad A-B = ۲ \Rightarrow A-B = ? \Rightarrow \underbrace{(A-B)}_{۲}(A+B) = A^۲-B^۲$

$\Rightarrow ۲(A+B) \Rightarrow (x+۵)-(x-۴) = ۵+۴ \Rightarrow ۲(A+B) = ۵+۴ \Rightarrow A+B = \frac{۵+۴}{۲}$

$\Rightarrow A+B-۲ = \frac{(۵+۴)}{۲}-۲ \Rightarrow \frac{(۵+۴-۴)}{۲} = \boxed{\frac{۵}{۲}}$ ✓

۲