۱- الف) $y=۳x^۲-۲x \to a>۰$ $x_s=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ $y_s=\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۱}{۳}$

از نقطه $(۲,۴)$ می‌گذرد ✓

ب) $y=-x^۲+۴x \to a<۰$ $x_s=\frac{-۴}{-۲}=۲$ $y_s=-۴+۸=۴$ ✓

از نقطه $(۲,۴)$ می‌گذرد ✓ (۲)

۲- الف) $y=۲x^۲-۷x+۳ \to a>۰$ $x_s=\frac{۷}{۴}$ $y_s=-\frac{۹}{۸}$

ب) $y=-x^۲+۴x-۱$ $a<۰$ $x_s=۲$ $y_s=۳$

از نقاط $(۲,۳)$ و $(۴,۳)$ می‌گذرد ✓

از نقاط $(۲,۳)$ و $(-۱,۳)$ می‌گذرد ✓ (۲)

۳- $x^۲-x-۳=۰$ α,β ریشه‌ها $S=۱$ $P=-۳$ $\alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۱۳}$

الف) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ ✓ ب) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۱+۶=۷$ ✓ (۲)

ج) $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)=۱۰$ ✓ $\alpha^۳-\beta^۳=(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)=۴\sqrt{۱۳}$ ✓

۴- $y=(a-۲)(a^۲-۴a+۵)$ → ریشه مضاعف

$a=۲$

$\Delta<۰$ ✓

$a^۲-۴a<۰ \to a(a-۴)<۰ \to ۰<a<۴$

اگر $a=۴ \to a^۲-۴a+۴=(a-۲)^۲$ ✓

چون ریشه $a=۲$ هم قبول است پس داریم $۰\le a<۴$ ✓ (۲)

۵- $۳x^۲-۱۲x-۵=۰ \to \alpha+\beta=۴$ $\alpha\beta=-\frac{۵}{۳}$

$۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ $\beta=۴-\alpha$

$۲\alpha^۲+(۴-\alpha)^۲-۴\alpha=۷ \to ۳\alpha^۲-۱۲\alpha+۹=۰$

$\to \alpha^۲-۴\alpha+۳=۰ \to (\alpha-۱)(\alpha-۳)=۰$

$\to \alpha=۱,\ \beta=۳$

$\to \beta=۱,\ \alpha=۳$

$\alpha\beta=۳=-\frac{a}{۳} \to a=-۹$ (۲)

$\frac{a}{\text{ریشه بزرگتر}}=\frac{-۹}{۳}=-۳$ ✓

- ۶

$A(2a, 3, a-2)$

$B(7-2a, a-2)$ $\xrightarrow{ac=3}$ $B(\frac{1}{2}, 1)$ $\xrightarrow{\text{وسط}}$ $x_S = \frac{4+\alpha\beta}{2} = \frac{2a+3+7-2a}{2} = 5 \Rightarrow b = 5$

$S(b, b-2)$ $\xrightarrow{b=5}$ $S(5, 3)$

$y = a(x-x_S)^2 + y_S = a(x-5)^2 + 3$ $\xrightarrow{B(1,1)}$ $y = a(1-5)^2 + 3 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

$y = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$ $\xrightarrow{x=0}$ $y = -\frac{25}{8} + 3 = -\frac{1}{8}$ ← فاصله‌ی مبدا مختصات

- ۷

$ax^2 - dx - b = 0 \rightarrow S = -\frac{d}{a} = 1 \quad P = -\frac{b}{a}$

$4\alpha^2 + 3\alpha^2 - 2\beta = 17 \rightarrow 3\alpha^2 + 3\alpha^2 + 10^2 - 10\alpha^2 - 2\beta = 17 \rightarrow 3(\alpha^2 + \beta^2) + 10(\beta - \alpha)^{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta} = 17$

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 + 4ab}}{|a|} = \sqrt{1 - \frac{4}{a}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow 3 + \frac{40b}{a} - 10(\alpha\beta) = 17$

$\rightarrow 40b = -32a \Rightarrow b = -\frac{4}{5}a$

- ۸

$y = ax^2 + bx + c \rightarrow c = \frac{3}{2}$ $\quad (-3, 0), (1, 0)$ نقاط روی y $\quad \frac{-3+1}{2} = x_S = -1$

$y_S = \frac{1}{2}$

$y = a(x+1)^2 - \frac{1}{2}$ $\quad (0, \frac{3}{2})$ $\rightarrow a(0+1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 1$

$(1, \beta) \in f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \in (1+1)^2 - \frac{1}{2} = \Delta \Rightarrow \beta = 5$

- ۹

$x^2 + 4x + q = 0$ $\quad \alpha < \beta < 0 \rightarrow S < 0 \quad P > 0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\quad \beta = a \rightarrow (a > 0)$ $\quad \Delta = 16 - 4q \quad \alpha = \frac{-4 \pm 2\sqrt{9-q}}{2} \Rightarrow \alpha = -2 + \sqrt{9-q}$

$\beta = -2 - \sqrt{9-q}$

$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 80 + 12\sqrt{5}$

$\alpha^2 + 2(\alpha^2 \beta^2) = 80 + 12\sqrt{5} \rightarrow \alpha^2 = 12 + 12\sqrt{5} + 4q \rightarrow \alpha^2 = 18 - q + 4\sqrt{9-q}$

$\quad = 18 - q + 2\sqrt{36 - 4q}$

$18 - q + 2\sqrt{36-4q} = 12 + 12\sqrt{5} + 4q \rightarrow 6 - q = 4q \Rightarrow q = 1$

$2\sqrt{36-4q} = 12\sqrt{5} \Rightarrow q = 1$

- ۱۰

$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} = 5 \rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = 25 \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = 25$

$mx^2 + 2mx + 2 = 0$ $\quad 4m^2 - (m+12)4m + 1 = 0$ $\quad = \frac{5}{6} + 2\sqrt{\frac{1}{6}} = -\frac{b}{c} + 2\sqrt{\frac{a}{a}}$

$\rightarrow -m^2 + 3m + 2 = 0 \rightarrow \frac{c}{a} = -(-2)$ $\quad = m + 12 + 2\sqrt{12} \Rightarrow m = -1$