

۲۰

الف) $y^3 - 2x^2 \leq 2x - 1$

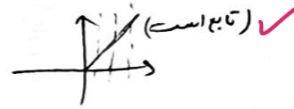
$$\left. \begin{aligned} y_1^3 &\leq 2x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ y_2^3 &\leq 2x_2^2 + 2x_2 - 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x_1 \leq x_2} y_1^3 \leq y_2^3 \rightarrow y_1 \leq y_2 \text{ (تابع است)} \checkmark$$

ب) $x \cos y = y \cos x$

مثال نقض $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \cos y \leq 0 \rightarrow \cos y \leq 0 \rightarrow y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \dots$
(تابع نیست) $\checkmark$

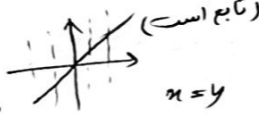
ج) $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy} \quad x, y > 0$

$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy} \xrightarrow{(\cdot)^2} \frac{(x+y)^2}{4} \leq xy \rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq 4xy \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \leq 0$
 $(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow x=y$



د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y \leq 0$

$xy^2 + 2x \leq y^3 + 2y$
 $x(y^2 + 2) \leq y(y^2 + 2)$
 $\Rightarrow (x-y)(y^2 + 2) \leq 0$
 $\Rightarrow x=y$



الف) $|y| + x^2 \leq 2y \rightarrow |x| + y^2 \leq 2x$

$A \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} \\ x < 0 \rightarrow \sqrt{-x} \end{cases}$
مثال نقض $\Rightarrow x=0 \rightarrow [y] \leq 1 \rightarrow 1 \leq y < 2$ (تابع نیست) $\checkmark$

ب) $[y] + [x] \leq 1$

مثال نقض $\Rightarrow x=0 \rightarrow [y] \leq 1 \rightarrow 1 \leq y < 2$ (تابع نیست) $\checkmark$

در هر دو بازه‌ی $0 \leq x \leq 3$ و $|x-1| \geq 2$ صحت ی‌کنند $\Rightarrow |x-1| = 2 \Rightarrow x=3$

$2x^2 - b \xrightarrow{x=9} 2(9) - b$
 $a + 2x \xrightarrow{x=9} a + 18$
 $\Rightarrow 2(9) - b \leq a + 18 \Rightarrow 18 - b \leq a + 18 \Rightarrow a \geq -b$

$f(x) \leq \sqrt{-x^2 - bx + a}$, $D_f \subseteq [b, a]$, $a+b = ?$ ($a \neq 0, b \in \mathbb{Z}$)

$-(x-b)(x-a) \leq -x^2 - bx + a$
 $-x^2 + (a+b)x - ab \leq -x^2 - bx + a \Rightarrow a+bs-b \rightarrow a+b \leq 1$
 $-abs \leq a \xrightarrow{a \neq 0} b \leq -1$

$y \leq \frac{2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $D_y \subseteq (-\infty, 2)$, $3a+c-3|b| = ?$

$bx+c \leq 0 \xrightarrow{x=2} 2b+c \leq 0 \rightarrow c \leq -2b$

$3a+c-3|b| \xrightarrow{b \leq 0, c \leq -2b, a \geq 0} 3a+c-3|b| \geq 3a-2b-3|b|$
جواب نهایی

$ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow$ اگر عبارت درجه ۲ ریشه‌ی مفصل داشته باشد در دو طرف ریشه تابع مثبت و یا منفی است

$\frac{1}{-} \frac{m_1}{-} \frac{1}{+} \frac{m_2}{+}$

$a \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{+} \frac{1}{-}$

پس با توجه به دامنه‌ی داده شده عبارت نمی‌تواند عامل (x^2) داشته باشد

چنین عبارت $b < 0 \leq bx+c$ زیرا
در تعیین علامت این عبارت سمت راست ریشه هم علامت یا ضرب x است.

$$y \leq \sqrt{\frac{x^2 + r}{x+b}} + a, \quad D_y \leq (r, +\infty), \quad b \leq ?$$

$$\frac{x^2 + r}{x+b} + a \geq 0 \Rightarrow \frac{(r+a)x + ab + r}{x+b} \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{-ab-r}{r+a}$$

$\downarrow$
 $x \leq -b$

باقی به دامن می‌دادن شده عبارت تنها یک ریشه دارد پس یعنی صورت کسر ناقدر ریشه است و یا ریشه‌ای آن با مخرج یکسان است

$$\checkmark \quad b \leq -b \leq r \quad \Leftarrow \quad \text{است} \quad (r)$$

$$y = \sqrt{x^2 - x} \quad \text{الف)}$$

$$x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x \leq 0 \quad x \geq 1$

$$\frac{-1}{-1} + \frac{0}{0} + \frac{1}{1} = \Rightarrow D_y \leq [-1, 0] \cup [1, +\infty) \quad \checkmark$$

$$\div) y = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}$$

$$|x|-1 > 0 \rightarrow |x| > 1 \rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

$$D_y \leq (1, +\infty) \cup (-\infty, -1) \quad \checkmark$$

$$\text{الف)} y \leq \sqrt{\frac{1}{|x| - [x]}}$$

$$|x| - [x] \neq 0 \rightarrow |x| \neq [x] \rightarrow D_y \leq \mathbb{R} - \{w\} \quad \checkmark$$

$$\div) \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 9$$

$$\sqrt{y} \leq 9 - \sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$

$$9 - \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow 9 \geq \sqrt{x} \rightarrow 81 \geq x$$

$$\Rightarrow D_y = [0, 81] \quad \checkmark$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left[xn - \frac{1}{x}\right] + \left[xn + \frac{1}{x}\right]}}$$

$$\left[xn - 1 + \frac{1}{x}\right] \quad \left[xn + 1 + \frac{1}{x}\right] \geq 1 + \left[xn + \frac{1}{x}\right]$$

$\downarrow$
 $-1 + \left[xn + \frac{1}{x}\right]$

$$\Rightarrow \sqrt{-1 + \left[xn + \frac{1}{x}\right]} + \sqrt{1 + \left[xn + \frac{1}{x}\right]} \geq 1 \Rightarrow 2\left[xn + \frac{1}{x}\right] \geq 0 \Rightarrow \left[xn + \frac{1}{x}\right] \geq 0$$

$$\textcircled{x \geq \frac{1}{x}} \quad \checkmark$$

$$D_y \leq \left[\frac{1}{x}, +\infty\right)$$

$$y \leq \sqrt{1 - \log(rn - a)}, \quad D_y \subseteq [b, c], \quad c - b \leq ? \quad \dots$$

$$\begin{cases} rn - a > 0 \rightarrow n > \frac{a}{r} \\ 1 - \log(rn - a) \geq 0 \rightarrow \log_{10}(rn - a) \leq 1 \rightarrow rn - a \leq 10 \rightarrow n \leq \frac{10 + a}{r} \end{cases}$$



$$\frac{a}{r} < n \leq \frac{10 + a}{r}$$

$$b < n \leq c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} \leq b$$

$$\frac{10 + a}{r} \leq c$$

(2)

(10)

$$c - b \leq \frac{10 + a}{r} - \frac{a}{r} \leq \frac{10}{r} \leq \textcircled{A} \quad \checkmark$$