

توجه داشته باشید:

۱۸

درجه اول

$$x \rightarrow f(-x) - x^2 f(x) = 2|x| + 1$$

$$+ x^2 f(x) + f(x) = 2|x| + 1$$

نشان دهیم
که این دو عبارت
برای هر x
برابرند

همه جا باید یکی
باشد - بناری!

$$\left. \begin{aligned} f(x) + x^2 f(x) &= 2|x| - 2|x| + 1 - x \\ f(x)(1+x^2) &= 2|x|(1-x) + 1 - x \end{aligned} \right\} \quad \text{①}$$

$$f(x) = \frac{2|x|(1-x) + 1 - x}{1+x^2}$$

صفتی افرد...

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{2|x|(1-x) + 1 - x}{1+x^2} \quad x \geq 0 \\ &= \frac{2x(1-x) + 1 - x}{1+x^2} = \frac{2x - 2x^2 + 1 - x}{1+x^2} = \frac{-x^2 + x + 1}{1+x^2} \\ &\quad x < 0 \\ &= \frac{-x^2 - x + 1}{1+x^2} \end{aligned} \right.$$

$$f(x) + f(0) = x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{x=0} 2f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = 1$$

② ③

$$\begin{aligned} x \Rightarrow x^2 &\rightarrow f(x^2) + 1 = x^2 - 3x^2 + 2 \\ \Rightarrow f(x^2) &= x^2 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} \Rightarrow x^2 + x + 2 = y(x-1) \Rightarrow x^2 + (1-y)x + 2+y = 0$$

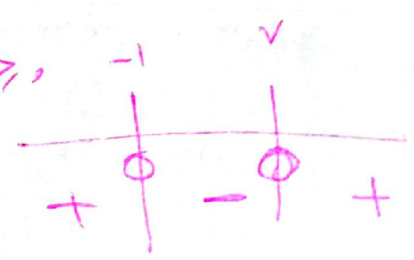
$$x = \frac{-(1-y) \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4 \times 1 \times (2+y)}}{2}$$

④ ⑤

$$= \frac{-1+y \pm \sqrt{y^2 - 2y + 1 - 8 - 4y}}{2} \quad \Delta \geq 0$$

$$y^2 - 2y - 7 \geq 0, \quad (y-1)(y+1) \geq 0$$

$$R_f: \mathbb{R} - (-1, 1) \checkmark$$



(2) (5)

الف) $y = 2x^2 - 8x + 1$

$R_f: \left[-\frac{14}{4}, +\infty\right) \checkmark$

$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4}$

$y_{min} = 2\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{2}\right) + 1 = \frac{2 \cdot 16}{4} - \frac{32}{2} + 1 = \frac{-14}{2} = -\frac{14}{2}$

$\frac{-20}{4}$

ب) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 8}$

$\checkmark f$

$R_f = (-\infty, 4] \Rightarrow \sqrt{\quad} \cdot [0, 4] \checkmark$

$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2}$ (3)

$y_{max} = -9 + 11 - 8 = 4$ (4)

ج) $y = \sqrt{x^2 - 4x^2 + 2x + 1}$

$\checkmark \mathbb{R}$

$\Rightarrow R_f = [0, +\infty) \checkmark$

د) $\log(x^3 - 4x^2 + 11x + 2)$

$\log(0, +\infty)$

$= \mathbb{R}$

$R_f \subset \mathbb{R} \checkmark$

هـ) $\frac{3x+1}{2x-4}$ $\frac{ad-bc \neq 0}{\Rightarrow} \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\} \checkmark$

$ad-bc \neq 0$

(2) (5)

ب) $y = \sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}$ $\frac{ad-bc \neq 0}{\Rightarrow} \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\} \checkmark \rightarrow [0, +\infty) - \left\{\frac{4}{3}\right\}$

ج) $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x^2 + 3 + 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

$= \sqrt{x^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 3}}$

$R_f = \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \checkmark$

$a > 0$

$\sqrt{x^2 + 3} = 1$

منقول

$\sqrt{x^2 + 3} = 1$

به نام خداوندگار

$$y = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2 + 2}}{x^2 + 2} - 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a}$$

$a_1 = 1$
 $x^2 + 2 = 1$
نمی‌شود

$a_2 = 2$ کبر مقدار

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow R_f = \left(\frac{5}{2}, +\infty \right) - 2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) = IR$$

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{روش اصلی}} yx^2 - y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \Rightarrow yx^2 - 2x^2 = 2 + y \Rightarrow x^2(y - 2) = 2 + y$$

(۱) $\frac{2+y}{y-2}$

(۲)

$$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$$

نقطه $x = 0$ را در نظر بگیرید

روش دیگر

$x^2 \rightarrow \min 0$ $\frac{2}{-1} = -2$

$x^2 \rightarrow \max +\infty$ $\frac{2+\infty}{\infty^2-1} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0$

نقطه $x = 0$ را در نظر بگیرید

مخرج به ازای دو -۱ صفر شود
در نقطه $x = 0$ نیز صفر شود
هر دو صفر

$$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$$

بهمین روش $+\infty$ یک صفر است باز هم صفر باز

$$f(x) = \frac{2 \sin x + 2}{\sin x - 3}$$

مخرج صفر نمی‌شود

(۱) $\min \sin x = -1$

(۲) $\max \sin x = 1$

(۳) $R_f = [-3, -\frac{1}{2}]$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

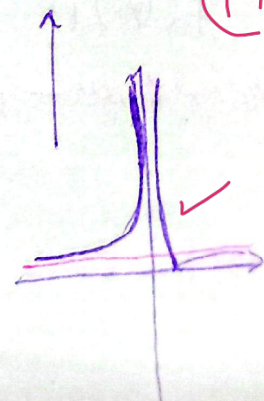
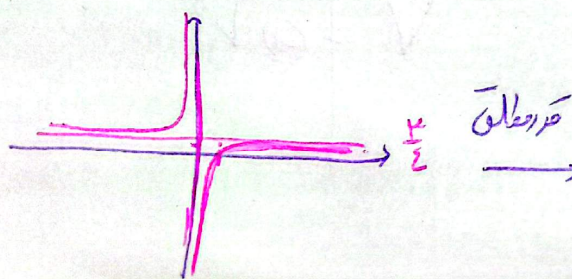
(۱) $R = IR - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow R_f = [0, +\infty)$

(۲)

نقطه $x = 0$ را در نظر بگیرید

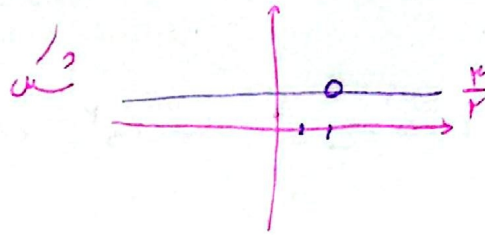
روش دیگر

$$x=1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{0}{1} = 0$$



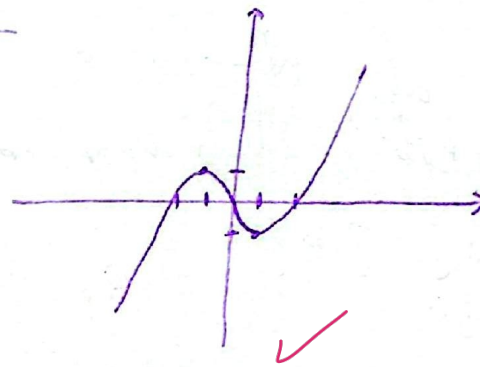
بنای افراز داشت

$$y = \sqrt{\frac{9x-18}{-11+2x}} = \sqrt{\frac{9(x-2)}{2(x-2)}} = \sqrt{\frac{9}{2}} \Rightarrow \boxed{R_f = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$



$$y = x|x| - 2x$$

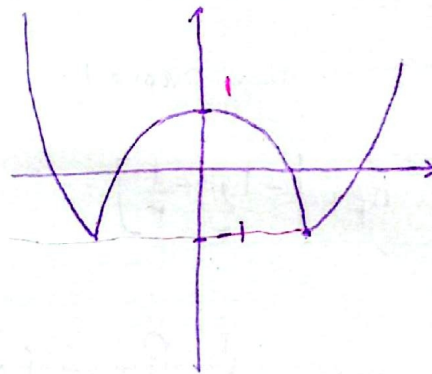
$-x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$
$-x(x+2)$	$x(x-2)$
$\frac{x}{x+1} = -1$	$\frac{x}{x-2} = 1$
$-1 + 2 = 1$	$1 - 2 = -1$



$R_f = \mathbb{R}$

(2) (9)

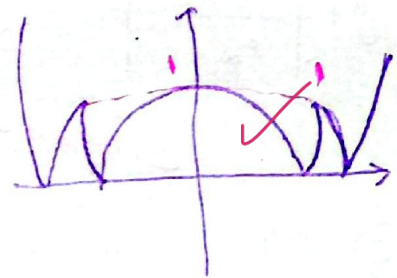
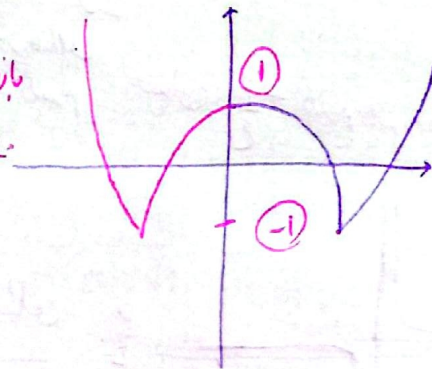
$$y = |f(|x|) + 1|$$



$f(x) + 1$

$$y = |f(|x|) + 1|$$

$f(|x|) + 1$ باز هم همنوعه
یعنی یک تصویر است به معنی که قرینه است



(2) (10)

۱- جای n ، $-n$ قرار می دهیم و یک دستگاه می سازیم:

$$\begin{aligned} f(-n) - n^r f(n) &= 2|n| + 1 \xrightarrow{\times n} \begin{cases} n^r f(-n) - n^{r+1} f(n) = 2n|n| + n & (I) \\ f(n) + n^r f(-n) = 2|n| + 1 & (II) \end{cases} \\ f(n) + n^r f(-n) &= 2|n| + 1 \end{aligned}$$

$$\underline{II - I} \rightarrow (1 + n^r) f(n) = 2(1 - n)|n| + 1 - n \Rightarrow f(n) = \frac{(1 - n)(2|n| + 1)}{1 + n^r}$$