

۱

$$u(f(-u) - uf(u)) = 21(u+1)$$

$$f(u) + uf(-u) = 21 - u + 1$$

$$-uf(u) + uf(u) = -2u(u+1)$$

$$f(u) + uf(-u) = 21 - u + 1$$

$$u^2 f(u) + f(u) = -2u(u+1) + 21 - u + 1 \Rightarrow f(u)(u^2 + 1) = -2u(u+1) - u + 21 - u + 1 \Rightarrow f(u) = \frac{-2u(u+1) - u + 21 - u + 1}{u^2 + 1}$$

* در صورتی که $u < 0$ پس یک بار در دو طرف معادله u ضرب می‌کنیم تا برای u مثبت درجه اول از دسترس خارج شود:

$$u < 0 \rightarrow f(u) = \frac{2u^2 - u - 2u + 1}{u^2 + 1} = \frac{2u^2 - 3u + 1}{u^2 + 1}$$

جواب

$$u > 0 \rightarrow f(u) = \frac{2u + 1 - 2u^2 - u}{u^2 + 1} = \frac{-2u^2 + u + 1}{u^2 + 1}$$

۲

$$f(u) + f(0) = u^2 - 3u + 4$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(0) + f(0) = 0 - 0 + 4 \Rightarrow 2f(0) = 4 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$f(u) + 2 = u^2 - 3u + 4 \Rightarrow f(u) = u^2 - 3u + 4 - 2 \Rightarrow f(u) = u^2 - 3u + 2$$

$$f(u^2) = u^4 - 3u^2 + 2$$

جواب

۳

$$y = \frac{u^2 + u + 2}{u - 1} \Rightarrow yu - y = u^2 + u + 2 \Rightarrow u^2 - yu + u + y + 2 = 0$$

در این معادله u مجهول و y ثابت است. پس باید درجه اول از دسترس خارج شود.

$$\Rightarrow u^2 + (1 - y)u + y + 2 = 0 \xrightarrow{\text{استفاده از فرمول دلتا}} u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow u = \frac{y + 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \rightarrow \Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (-y + 1)^2 - 4(1)(y + 2) \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 - 4y - 8 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 6y - 7 \geq 0 \Rightarrow (y - 7)(y + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{+1} \leq y \leq \frac{7}{+1} \Rightarrow R_y = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$$

جواب

۴

$$y = 2u^2 - 4u + 1 \Rightarrow \text{ext } u = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_y = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

جواب

$$y = \sqrt{-u^2 + 4u - 5} \Rightarrow \text{ext } u = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y = \sqrt{-(-1)^2 + 4(-1) - 5} = \sqrt{-1 - 4 - 5} = \sqrt{-10}$$

جواب

$$y = \sqrt{u^2 - 3u^2 + 4u + 1} \rightarrow R_y = [R] \Rightarrow R_y = [0, 4]$$

جواب

$$y = \log(u^2 - 4u^2 + 5u + 4) \Rightarrow \text{چون جمله اول و دوم درجه دوم هستند پس باید درجه اول از دسترس خارج شود}$$

$$y = u^2 - 4u^2 + 5u + 4 \rightarrow \text{بزرگترین مقدار} \rightarrow R_y = R \Rightarrow y = \log(0 + \infty) \Rightarrow R_y = (-\infty, +\infty)$$

جواب

۵

$$y = \frac{3u+1}{u-4} \Rightarrow R_y = \{ \frac{3}{1} \} = R_y$$

جواب

$$y = \sqrt{\frac{2u+1}{u-2}} \Rightarrow R_y = \sqrt{R} \Rightarrow R_y = [0, +\infty) - \{2\}$$

جواب

$$y = \frac{u^2 + 3}{\sqrt{u^2 + 3}} \Rightarrow \frac{u^2 + 3}{\sqrt{u^2 + 3}} = \frac{u^2 + 3}{\sqrt{u^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + 3}} \Rightarrow \frac{u^2 + 3 + 1}{\sqrt{u^2 + 3}} = \frac{u^2 + 4}{\sqrt{u^2 + 3}}$$

$$\Rightarrow R_y = [\frac{4}{\sqrt{3}}, +\infty)$$

جواب

$$y = u^2 + \frac{1}{u^2 + 4} \Rightarrow y = u^2 + \frac{1}{u^2 + 4} - 4 \Rightarrow y = u^2 + \frac{1}{u^2 + 4} - 4$$

جواب

① به روشی اولی (دیفرانسیل کردن) می‌توانیم u پیدا کنیم و در نهایت به دست می‌آید: $y = \frac{3u^2 + 4}{u^2 - 1} \Rightarrow y(u^2 - 1) = 3u^2 + 4$ $\Rightarrow yu^2 - 3u^2 = 4 + y$ $u^2(y - 3) = 4 + y \Rightarrow u^2 = \frac{4 + y}{y - 3} \Rightarrow u = \pm \sqrt{\frac{4 + y}{y - 3}}$ چون $y = -4$ $\frac{4 + y}{y - 3} > 0 \Rightarrow \frac{-4 + 4}{-4 - 3} = \frac{0}{-7} < 0$ پس $R_y = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$ جواب	② به کمک تانگنسی: چون $y = \frac{3u^2 + 4}{u^2 - 1}$ $u^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{-1} = -4$ همچنین $u^2 \rightarrow +\infty \Rightarrow y = \frac{3x + \infty}{1x + \infty} = 3$ پس $R_y = [-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$ جواب	۲ ۶
$y = \frac{2 \sin u + 3}{\sin u - 3}$ با $\sin u = 1$ $\frac{-2 + 3}{1 - 3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ با $\sin u = -1$ $\frac{2 + 3}{-1 - 3} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$	چون $1 \leq \sin u \leq -1$ y از $-\frac{1}{2}$ تا $-\frac{5}{4}$ متغیر می‌شود. پس $R_y = [-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}]$ جواب	۲ ۷
الف) $y = \left \frac{3u - 1}{2} \right$ ب) $y = \sqrt{\frac{9u - 18}{9u - 18}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{9}{9}} = \frac{3}{3} = 1$ پس $R_y = \{1\}$ جواب	① نمودار تابع $y = \left \frac{3u - 1}{2} \right$ را می‌کشیم و می‌بینیم که دامنه آن $u \in \mathbb{R}$ است. پس $R_y = [0, +\infty)$ جواب	۲ ۸
$y = u u - 2u$ $\begin{cases} y = u^2 - 2u & u \geq 0 \\ y = -u^2 - 2u & u < 0 \end{cases}$	نمودار تابع را می‌کشیم و می‌بینیم که دامنه آن $u \in \mathbb{R}$ است. پس $R_y = \mathbb{R}$ جواب	۲ ۹
① $y = f(u) \Rightarrow$ ② $y = f(u) \Rightarrow$ ③ $y = f(u) + 1 \Rightarrow$ ④ $y = f(u) + 1 \Rightarrow$	خود شش‌شماره خواستیم: پس $R_y = [0, +\infty)$ جواب	۲ ۱۰