

1

$$u(f(-u) - uf(u)) = 2|u| + 1$$

$$f(u) + uf(-u) = 2|u| + 1$$

$$-uf(u) + uf(u) = -2u|u| - u$$

$$f(u) + uf(-u) = 2|u| + 1$$

$$u^2 f(u) + f(u) = -2u|u| - u + 2|u| + 1 \Rightarrow f(u)(u^2 + 1) = -2u|u| - u + 2|u| + 1 \Rightarrow f(u) = \frac{-2u|u| - u + 2|u| + 1}{u^2 + 1}$$

* در صورتی که $u < 0$ پس یک بار در هر دو طرف u ضرب می‌کنیم تا علامت u در صورتی که $u < 0$ باشد $-u$ شود و $|u|$ به u تبدیل شود.

$$u < 0 \rightarrow f(u) = \frac{2u^2 - u - 2u + 1}{u^2 + 1} = \frac{2u^2 - 3u + 1}{u^2 + 1}$$

$$u > 0 \rightarrow f(u) = \frac{2u + 1 - 2u^2 - u}{u^2 + 1} = \frac{-2u^2 + u + 1}{u^2 + 1}$$

جواب

2

$$f(u) + f(0) = u^2 - 3u + 4$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(0) + f(0) = 0 - 0 + 4 \Rightarrow 2f(0) = 4 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$f(u) + 2 = u^2 - 3u + 4 \Rightarrow f(u) = u^2 - 3u + 4 - 2 \Rightarrow f(u) = u^2 - 3u + 2$$

$$f(u^2) = u^4 - 3u^2 + 2$$

جواب

3

$$y = \frac{u^2 + u + 2}{u - 1} \Rightarrow y(u - 1) = u^2 + u + 2 \Rightarrow u^2 - yu + u + y + 2 = 0$$

در اینجا u مجهول و y ثابت است. پس با درجی می‌توانیم u را پیدا کنیم.

$$\Rightarrow u^2 + (1 - y)u + y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{-(1 - y) \pm \sqrt{(1 - y)^2 - 4(y + 2)}}{2}$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (-y + 1)^2 - 4(y + 2) \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 - 4y - 8 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 6y - 7 \geq 0 \Rightarrow (y - 7)(y + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq -1 \text{ یا } y \geq 7$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{+} \frac{7}{-} \Rightarrow R_y = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$$

جواب

4

$$y = 2u^2 - 4u + 1 \Rightarrow \text{ext } u = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow R_y = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$y = \sqrt{-u^2 + 4u - 4} \Rightarrow \text{ext } u = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = -u^2 + 4u - 4 \Rightarrow \text{ext } u = 2 \Rightarrow R_y = (-\infty, 2] \Rightarrow R_y = \sqrt{(-\infty, 2]} = [0, 2]$$

$$y = \sqrt{u^2 - 4u^2 + 4u + 1} \Rightarrow R_y = [0, +\infty)$$

* بزرگترین و کوچکترین مقادیر R_y عبارت از R است پس $R_y = [0, +\infty)$ است.

$$y = \log(u^2 - 4u^2 + 4u + 1) \Rightarrow R_y = R$$

* چون $y = \log$ پس $R_y = R$ است.

$$y = u^2 - 4u^2 + 4u + 1 \Rightarrow R_y = R \Rightarrow y = \log(0 + \infty) \Rightarrow R_y = (-\infty, +\infty)$$

جواب

5

$$y = \frac{3u + 1}{u - 2} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$y = \sqrt{\frac{2u + 1}{u - 2}} \Rightarrow R_y = \sqrt{\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}} \Rightarrow R_y = [0, +\infty) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$y = \frac{u^2 + 3}{\sqrt{u^2 + 3}} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$y = \frac{u^2 + 3}{\sqrt{u^2 + 3}} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$y = u^2 + \frac{1}{u^2 + 3} \Rightarrow R_y = [1, +\infty)$$

جواب

① به روش اولی (دیفرانسیل) می‌توانیم u پیدا کنیم و در نهایت برمی‌تابیم $y = \frac{3u^2 + 4}{u^2 - 1} \Rightarrow y(u^2 - 1) = 3u^2 + 4$ $\Rightarrow yu^2 - 3u^2 = 4 + y$ $u^2(y - 3) = 4 + y \Rightarrow u^2 = \frac{4 + y}{y - 3} \Rightarrow u = \pm \sqrt{\frac{4 + y}{y - 3}}$ $\Rightarrow R_y = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \rightarrow \text{جواب}$ ② به روش دوم: $y = \frac{3u^2 + 4}{u^2 - 1} \xrightarrow{u^2=0} y = \frac{4}{-1} = -4$ $\xrightarrow{u^2=+\infty} y = \frac{3x + \infty}{1x + \infty} = 3$ $R_y = [-\infty, -4] \cup (3, +\infty) \rightarrow \text{جواب}$ چون $u^2 \geq 0$ می‌تواند به ازای $u^2 = 0$ و $u^2 \rightarrow +\infty$ به دست آید	③ چون $\sin u$ از -1 به 1 می‌رود و عبارت $\frac{2 + \sin u}{\sin u - 3}$ را می‌بینیم $y = \frac{2 + \sin u}{\sin u - 3}$ وقتی که $\sin u = -1$ داریم $y = \frac{2 - 1}{-1 - 3} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$ وقتی که $\sin u = 1$ داریم $y = \frac{2 + 1}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ $R_y = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}] \rightarrow \text{جواب}$	① نمودار تابع $y = \frac{3u - 1}{u}$ را می‌کشیم ② امکان دارد که y به هر عددی برسد $y = \frac{3u - 1}{u} \Rightarrow yu = 3u - 1 \Rightarrow yu - 3u = -1 \Rightarrow u(y - 3) = -1$ $\Rightarrow u = \frac{-1}{y - 3} \Rightarrow y \neq 3$ $\Rightarrow R_y = \{y \mid y \neq 3\} \rightarrow \text{جواب}$	① $y = u - 2u$ ② $y = u^2 - 2u \quad u \geq 0$ $y = -u^2 - 2u \quad u < 0$ ③ $R_y = \mathbb{R} \rightarrow \text{جواب}$	① $y = f(u) \Rightarrow$ ② $y = f(u) \Rightarrow$ ③ $y = f(u) + 1 \Rightarrow$ ④ $y = 1 + f(u) \Rightarrow$ ⑤ $R_y = [0, +\infty) \rightarrow \text{جواب}$
--	--	---	--	--