A سمر ایمن - ۱۲ دخت

۱۹٫۵

DATE / / SUBJECT :

۱) ۲

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } (x_1, y_1) \in f(x) \\ \text{if } (x_2, y_2) \in f(x) \end{array} \right. , \text{ if } x_1 = x_2 \longrightarrow y_1 = y_2$

$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_2 \to 2x_1 = 2x_2 \to 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ x_1 = x_2 \to x_1^2 = x_2^2 \to 2x_1^2 = 2x_2^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2x_1 - 1 + 2x_1^2 = 2x_2 - 1 + 2x_2^2 \to y_1^3 = y_2^3$

$\to y_1 = y_2$

تابع هست ✓ ۰٫۵

ب) $x \cos y = y \cos x$

$x = \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \cos y = 0 \to \cos y = 0 \to y = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ ۰٫۵

✗ تابع نیست چون به ازای یک مقدار از x، چندین مقدار y داده است.

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \quad x, y \geq 0 \to x + y - 2\sqrt{xy} = 0 \to (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 =$

$\to \sqrt{x} = \sqrt{y} \longrightarrow (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2 \to x = y \quad \left(\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right) \to$

تابع هست ✓ ۰٫۵

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$

$y^2(x - y) + 2(x - y) = 0 \to (x - y)\underbrace{(y^2 + 2)}_{\text{همواره نامنفی}} = 0$

۰٫۵

$\to x = y \to$ تابع هست ✓

۲) تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & ; |x - 1| \geq 2 \\ a + 2x & ; -3 < x \leq -1 \end{cases}$ مفروض است. حاصل $a + b$ چیست؟

۲

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & \left\{ \begin{array}{l} x - 1 \geq 2 \to x \geq 3 \\ x - 1 \leq -2 \to x \leq -1 \end{array} \right. \\ a + 2x & -3 < x \leq -1 \end{cases}$

چون $f(x)$ تابع است، نشان‌دهنده این است که به ازای هر عضو از دامنه، تنها یک عضو از برد از آن خارج می‌شود، پس داریم:

$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2 - b \\ f(-1) = -2 + a \end{array} \right\} \longrightarrow 2 - b = -2 + a$

$\boxed{4 = a + b}$

DATE / / SUBJECT :

۴) ۳) دامنه $f(x) = \sqrt{a-bx-x^2}$ بازه $[b, a]$ است. حاصل $a+b$ چند است؟
$(a \neq 0 , b \in \mathbb{Z})$

$[b;a]$ دامنه بازه است $\xrightarrow{\text{پس}}$ b و a ریشه های معادله $\xrightarrow{\text{چون}}$ است (زیر رادیکال ≥ 0) و هیچ حدودی طرایی وجود ندارد.

$f(a) = 0 \rightarrow a - ba - a^2 = 0$
$f(b) = 0 \rightarrow a - b^2 - b^2 = 0 \rightarrow 2b^2 = a$ $\Big\}$ $2b^2 - ba - a^2 = 0$

$b^2 + b^2 - ba - a^2 = 0 \rightarrow b(b-a) + (b-a)(b+a) = 0$

$(b-a)(2b+a) = 0$
$\rightarrow b = a \rightarrow \times$ $\xrightarrow{\text{چون}}$ $([b,a] ; a > b)$
$\rightarrow 2b + a = 0 \rightarrow a = -2b$

$f(x) = \sqrt{a - bx - x^2} \xrightarrow{a=-2b} \sqrt{-2b - bx - x^2}$

$\begin{cases} x_1 = a = -2b \\ x_2 = b \end{cases}$ $P = x_1 x_2 = 2b = (-2b)(b) \rightarrow b = -1$

$\rightarrow a = +2$

$\boxed{a + b = +1}$

---

۴) ۴) دامنه تابع $y = \dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ برابر بازه $(-\infty, 2)$ است. حاصل $3a + c - 3|b|$ برحسب b کدام است؟

$ax^2 + bx + c > 0 \xrightarrow{D_f = (-\infty, 2)}$ پس عبارت زیر رادیکال معادله خط با شیب منفی بوده است $\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$

$bx + c > 0$ $\quad$ ریشه $= 2$ $\quad$ $+ \quad | \quad -$ $\rightarrow 2b + c = 0 \rightarrow c = -2b$

$3a + c - 3|b| = -2b + 3b = \boxed{b}$

DATE / / SUBJECT :

$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-[x]}}$ ۰۱۷۵

$|x|-[x] \neq 0 \longrightarrow$ (ص ۱۱۷۵ دامنه بیابید

$x \geq 0: \; x-[x] \neq 0 \to x \neq [x] \to x \notin \mathbb{Z}$ (I)

$x < 0: \; x+[x] \neq 0$

۰۱۲۵ $\{x \neq \mathbb{Z} , x>0\}$

$x, [x]$ همیشه هم علامت اند، فقط زمانی حاصل صفر میشود که هر ۲ همزمان برابر صفر شوند

$x = 0$

$[x]=0 \to 0 \leq x < 1 \; \Big\} \xrightarrow{\cap} x \neq 0$ ۰۱۵ (II)

$D_f: (I) \cup (II): \boxed{x \notin \mathbb{Z}}$

(I)

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$ $\quad x \geq 0 \; , y \geq 0$

1

$\sqrt{y} = 9 - \sqrt{x} \longrightarrow 9-\sqrt{x} \geq 0 \to$

$9 \geq \sqrt{x} \xrightarrow{\text{یعنی}} 0 \leq \sqrt{x} \leq 9 \xrightarrow{\text{بتوان } ۲}$

$0 \leq x \leq 81$ (II)

$D_f: (I) \cap (II): \boxed{0 \leq x \leq 81}$

الف) $f(x) = \sqrt{\log_x^{3x-1}}$ $\quad 3x-1>0 \to x > \frac{1}{3}$; $x>0$; $x \neq 1$ $\Big\} \xrightarrow{\cap} x > \frac{1}{3} - \{1\}$ ★ ۲) دامنه بیابید ۱۱۷۵

2

$\log_x^{3x-1} \geq 0$

$\frac{1}{3} < x < 1 \to 3x-1 \leq 1 \to x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow[\cap \; \frac{1}{3}<x<1]{\cap \; ★} \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$

$\cup$

$x > 1 \to 3x-1 \geq 1 \to x \geq \frac{2}{3} \xrightarrow[\cap \; x>1]{\cap \; ★} x > 1$

$D_f: x \in (\frac{1}{3}, +\infty) - (\frac{2}{3}, 1]$

DATE / / SUBJECT :

ب) $f(x)=\log \dfrac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0 \rightarrow 6+\sqrt{|x|}-|x|>0$

۰/۷۵

$\sqrt{|x|}=t \rightarrow -t^2+t+6>0 \rightarrow$

$t^2-t-6<0 \rightarrow (t-3)(t+2)<0$

$$\begin{array}{ccccc} & -2 & & 3 & \\ + & \vdots & - & \vdots & + \end{array}$$

$\rightarrow -2<t<3 \rightarrow -2<\sqrt{|x|}<3 \xrightarrow{\text{بدیهی}} 0<\sqrt{|x|}<3$

$\xrightarrow[2]{\text{توان}} 0<|x|<9 \rightarrow \begin{array}{c} 0<x<9 \\ -9<x<0 \end{array} \rightarrow x\in(-9,9)-\{0\}$

۷) دامنهٔ تابع $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x+b}+a}$ بازهٔ $(2,+\infty)$ باشد. مقدار b کدام است؟

۲

$\dfrac{3x+2}{x+b}+a\geq 0 \rightarrow \dfrac{3x+2+ax+ba}{x+b}\geq 0 \rightarrow \dfrac{x(3+a)+2+ba}{x+b}\geq 0$

ریشهٔ صورت : $x=\dfrac{-2-ba}{3+a}$

ریشهٔ مخرج : $x=-b$

اگر $a=-3$ آنگاه صورت کسر، ریشه‌ای ندارد و تنها ریشهٔ کسر که در جدول تعیین علامت مورد توجه واقع می‌شود ریشهٔ مخرج است:

$x+b=0 \rightarrow x=-b=2$

$\rightarrow \boxed{b=-2}$

۸) دامنهٔ $y=\sqrt{f(x)-x+1}$ کدام است اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & [x]>4 \\ 4x+3 & [x]\leq 4 \end{cases}$ ؟

۲

$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 5 \\ 4x+3 & x<5 \end{cases} \longrightarrow y=\begin{cases} \sqrt{2x-1-x+1} \\ \sqrt{4x+3-x+1} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \cap x\geq 5 \\ \sqrt{3x+4} & x\geq -\frac{4}{3} \cap x<5 \end{cases} \rightarrow y=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 5 \\ \sqrt{3x+4} & -\frac{4}{3}\leq x<5 \end{cases}$

$\left(D_{f(x)}=[-\frac{4}{3},+\infty)\right)$

۹) تابع $\dfrac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2}$ را ساده کنید و دامنه آن را بیابید.

۲

دامنه تابع بالا: $(4x^2+4x+1)^2 \neq 0 \rightarrow (2x+1)^4 \neq 0 \rightarrow \mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$

$$\frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1}$$

$2x+1$

دامنه در این حالت هم $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$

---

۱۰) اگر دامنه $y=\sqrt{1-\log(2x-a)}$ به صورت $(b,c]$ باشد، $c-b$ کدام است؟

۲

$2x-a>0 \rightarrow x>\frac{a}{2}$

$1-\log(2x-a)\geq 0 \rightarrow 1 \geq \log_{10}(2x-a) \rightarrow 10 \geq 2x-a$

$\frac{10+a}{2} \geq x$

$x \in (\underbrace{\frac{a}{2}}_{b}, \underbrace{5+\frac{a}{2}}_{c}]$ $\qquad c-b = 5+\frac{a}{2}-\frac{a}{2} = \boxed{5}$