آیلا نیروزنیا

۱- الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1^3 = 2x_1^2 + 2x_1 - 1 \\ y_2^3 = 2x_2^2 + 2x_2 - 1 \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2} y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2$$

تابع هست.

ب) $x\cos y = y\cos x$ (مثال نقض)

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cdot\cos y = \underbrace{y\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{y\times 0 = 0} \rightarrow \frac{\pi}{2}\cos y = 0 \rightarrow \cos y = 0$$

$$\rightarrow y = \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow x = \frac{1}{2},\ y \in \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}$$

تابع نیست.

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \quad x, y > 0 \rightarrow x + y = 2\sqrt{xy}$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (x+y)^2 = 4\sqrt{xy} \rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 4xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \rightarrow (x-y)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = y$$

تابع هست.

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0 \rightarrow x(y^2+2) - y(y^2+2) = 0$

$$(x-y)\underbrace{(y^2+2)}_{\text{همواره بزرگتر و مساوی } 2} = 0 \rightarrow x = y \rightarrow$$

تابع هست.

لیلا فیروزنیا

۲. $|x-1| \geq 2 \rightarrow x-1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3$

$ \searrow x-1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1$

$x=-1 \rightarrow a-2 = 2-b \rightarrow a+b = 4$

۳. $a - bx - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + bx - a \leq 0$

چون جواب نامعادله $[a, b]$ پس ریشه‌ها a و b

$\rightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0 \quad \begin{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}} -(a+b) = b \\ \xrightarrow{\mathrm{II}} ab = -a \end{cases}$

$x^2 + bx - a = 0$

$\xrightarrow{\mathrm{II}} a(b+1) = 0 \xrightarrow{\text{یا}} a = 0$ ✗ (طبق I $\rightarrow -b = b$ ✗)

$\searrow^{\text{یا}}\ b = -1$ ✓

$\xrightarrow{\mathrm{I}} a+b = \longrightarrow -b = \boxed{1}$

۴. $y = \dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \rightarrow D_f = (-\infty, 2) \rightarrow a = 0$

$a=0$ ، چون پیوسته است پس ضریب $x^2 = 0$

$bx+c > 0 \rightarrow bx > -c \quad \xrightarrow{b>0} x > \dfrac{-c}{b}$ ✗

$\xrightarrow{b<0} x < \dfrac{-c}{b} \rightarrow \dfrac{-c}{b} = 2 \rightarrow c = -2b$

$b<0 \downarrow |b| = -b$

$\rightarrow 3\underset{0}{a} + c - 3|b| \rightarrow -2b - 3(-b) \rightarrow -2b + 3b = \boxed{b}$

Date No

آیلا فیروزی

۵.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-[x]}} \to |x|-[x] \neq 0$

$-x-[x] \quad | \quad x-[x]$ (0)

$x-[x] \neq 0 \to x \neq [x] \to x \notin \mathbb{Z}$

$-x-[x] \neq 0 \to x \neq -[x]$

همواره برقرار (برای اعداد کوچکتر از صفر)

$\to \boxed{D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}}$

ب) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \xrightarrow{I} x \geq 0$

$\xrightarrow{II} \sqrt{x} \leq 9 \to x \leq 81$

$D_f = [0, 81]$

۶.

الف) $f(x) = \sqrt{\log_x^{3x-1}} \xrightarrow{I} 3x-1 > 0 \to 3x > 1 \to x > \frac{1}{3}$

$II: x > 0 \to x \neq 1$

$III: \log_x^{3x-1} \geq 0 \to 3x-1 \geq 1 \to 3x \geq 2 \to x \geq \frac{2}{3}$

$\to D_f = [\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$

ب) $f(x) = \log \dfrac{1}{6+\underbrace{\sqrt{|x|}}_{\text{همواره مثبت}}-|x|} \to 6 + \sqrt{|x|} - |x| \neq 0$

$\sqrt{|x|} = t \to -t^2 + t + 6 \neq 0 \to t^2 - t - 6 \neq 0 \to (t-3)(t+2) \to t = 3 \to \sqrt{|x|} = 3$

$t = -2$ یا غ ق

$\to |x| \neq 9 \to \boxed{x \neq \pm 9}$

$\dfrac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|} > 0 \to \begin{array}{ccccc} & -9 & & +9 & \\ - & ت & + & ت & - \end{array} \to D_f = (-9, 9)$

ریشه‌هاش ± 9

آیلا فیروزنیا

۷. چون بازه دامنه $(2,+\infty)$ است، پس یک ریشه ساده (۲) دارد که چون بازه باز است، باید ریشه‌ی مخرج باشد:

$x+b=0 \to x=2 \to 2+b=0 \to \boxed{b=-2}$

Date No

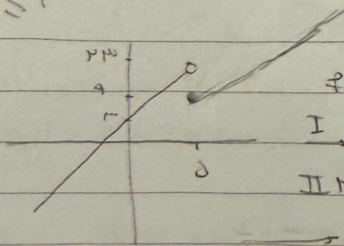
آیلا فیروزنیا

۵.

$$f(x)\begin{cases} 2x-1 & [x] > 4 \\ 4x+3 & [x] \leq 4 \end{cases}$$

$[x] > 4 \rightarrow x \geq 5$

$[x] \leq 4 \rightarrow x < 5$



$y = \sqrt{f(x) - x + 1}$, $f(x) - x + 1 \geq 0$

$f(x) \geq x - 1$

I $4x+3 \geq x-1 \rightarrow 3x \geq -4$, $x \geq -\frac{4}{3}$

II $2x-1 \geq x-1 \rightarrow x \geq 0$

$\rightarrow D_f = [-\frac{4}{3}, +\infty)$

۶.

$$\frac{24x^3+36x^2+18x+3}{(\underbrace{4x^2+4x+1}_{(2x+1)^2})^2} = \frac{3\cancel{(8x^3+12x^2+6x+1)}^{(2x+1)^3}}{(2x+1)^4}$$

$\rightarrow \frac{3}{2x+1} \xrightarrow{\text{دامنه}} 2x+1 \neq 0 \rightarrow 2x \neq -1 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

۱۰.

$y = \sqrt{1 - \log(2x-a)} \rightarrow 2x - a > 0 \rightarrow a < 2x \rightarrow x > \underbrace{\frac{a}{2}}_{b}$

$1 - \log(2x-a) \geq 0 \rightarrow \log(2x-a) \leq 1 \rightarrow 2x - a \leq 10$

$2x \leq 10 + a \rightarrow x \leq \frac{10+a}{2}$ c

$c - b \rightarrow \frac{10+a-a}{2} = 5$