

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \Rightarrow y^3 = 2x^2 + 2x - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x^2 + 2x - 1}$ تابع است. $41 = 42$

ب) $x \cos y = y \cos x \xrightarrow{x=y} x \cos y = y \cos x \xrightarrow{\cos x=0} x \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ برای یک x چند y داریم $\Rightarrow$ تابع نیست.

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}, x, y > 0 \rightarrow x+y = 2\sqrt{xy} \xrightarrow{\text{مربع}} x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$ $\rightarrow$ یک تابع همنامی برای x, y و برای هر x یک y وجود دارد!

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0 \rightarrow y^2(x-y) + 2(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(y^2+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ y^2+2=0 \Rightarrow y^2=-2 \end{cases}$ هیچ جواب حقیقی ندارد زیرا $(y^2 \geq 0)$

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a+2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases} \quad |x-1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 3 \\ x-1 \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & x \geq 3, x \leq -1 \\ a+2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$

$x=-1 \rightarrow 2-b = a-2 \Rightarrow \boxed{f = a+b}$

$f(x) = \sqrt{-x^2 - bx + a} \rightarrow -x^2 - bx + a \geq 0 \rightarrow$ دایره‌های a, b سوال $\rightarrow -x^2 - bx + a = 0 \rightarrow \Delta = -b$
 $\frac{x=b}{b \rightarrow 0} \rightarrow -b^2 - b^2 + a = 0 \Rightarrow a = 2b^2 \xrightarrow{a=2b^2} \frac{a=-2b}{a=2b^2} \Rightarrow -2b = 2b^2 \Rightarrow b = -1, a = 2$
 $\rightarrow a+b \xrightarrow{a=2, b=-1} \boxed{2-1=1}$

$y = \frac{2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \rightarrow$ دایره $(-\infty, 2)$ $\Rightarrow$ یک خط بوده است $\Rightarrow a=0$ و $\rightarrow$ دایره است!

$\Rightarrow 2b+c=0 \Rightarrow c = -2b$ چون دایره از $(-\infty, 2)$ است پس شیب $b < 0$ خط منفی بوده

$\rightarrow 3a+c-3|b| \xrightarrow{a=0, c=-2b} -2b-3(-b) = \boxed{b}$

الف) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|-[x]}} \rightarrow |x|-[x] \neq 0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ برابر با صفر می‌شود $\rightarrow$ برابر با صفر نمی‌شود! $\rightarrow \mathbb{Z}^+$ برای اعداد صحیح مثبت $\rightarrow \mathbb{Z}^-$ برای اعداد صحیح منفی

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^0$ تمام اعداد حقیقی به جز اعداد صحیح بزرگتر از صفر.

ب) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \Rightarrow \sqrt{y} = 9 - \sqrt{x} \xrightarrow{\sqrt{y} \geq 0} 9 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 9 \geq \sqrt{x} \Rightarrow 81 \geq x$

$\frac{\sqrt{x}}{x \geq 0} \Rightarrow 0 \leq x \leq 81 \Rightarrow D_f = [0, 81]$

$f(x) = \sqrt{\log^3 x - 1}$ $D_f: \begin{cases} 3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \quad (1) \\ x > 0, x \neq 1 \quad (2) \\ \log^3 x - 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \Rightarrow 3x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \quad (3) \\ x > 1 \Rightarrow 3x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow x > 1 \quad (4) \end{cases} \end{cases}$
 $\Rightarrow D_f = (1) \cap (2) \cap (3) \cup (4) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup (1, +\infty)$

$f(x) = \log \frac{1}{x + \sqrt{|x| - |x|}}$
 $D_f: \begin{cases} \frac{1}{x + \sqrt{|x| - |x|}} > 0 \Rightarrow x + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \Rightarrow \sqrt{|x|} > |x| - x \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{|x|} = -2 \text{ غلط} \\ t = \sqrt{|x|} = 3 \Rightarrow x = \pm 9 \end{cases} \\ |x| \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$
 $\Rightarrow D_f = (1) \cap (2) = (-9, 9)$

$y = \sqrt{\frac{3x+2}{x-2} + a} \rightarrow \text{دائره } a = (2, +\infty)$
 $D_g: \begin{cases} x+b \neq 0 \Rightarrow x \neq -b \rightarrow \text{مخرج صفر نشود} \\ \frac{3x+2}{x-2} + a \geq 0 \Rightarrow \frac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{3x+2}{x-2} > 3 \Rightarrow \frac{a}{x-2} \geq -3 \end{cases}$
 $\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$y = \sqrt{f(x) - x + 1}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; [x] > 4 \\ 4x+3 & ; [x] \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x \geq 5 \\ 4x+3 & ; x < 5 \end{cases}$
 $D_g: f(x) - x + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq x-1$
 $\Rightarrow D_g = (I) \cup (II) = [-\frac{5}{3}, +\infty)$

$y = \frac{4x^3 + 3x^2 + 11x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} \Rightarrow y = \frac{3(1x^3 + 1x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y = \frac{3(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$
 $y = \frac{3}{x^2 + 1} \rightarrow \text{دائره } \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$
 $\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$y = \sqrt{1 - \log^2 x - a}$ $D_f = (b, c]$ $c - b \rightarrow \frac{1+a}{y} - \frac{a}{y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$
 $\begin{cases} 2x-a > 0 \Rightarrow x > \frac{a}{2} \quad (I) \\ 1 - \log^2 x - a \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \log^2 x - a \xrightarrow{(I) \cap (II)} D_f = (\frac{a}{2}, \frac{1+a}{y}] \Rightarrow b = \frac{a}{2}, c = \frac{1+a}{y} \end{cases}$
 $\Rightarrow 1 \geq 2x - a \Rightarrow x \leq \frac{1+a}{2} \quad (II)$