نگین نیکوئی — دوازدهم ریاضی A — تکلیف شماره ۱

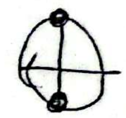
۱-

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \Rightarrow y^3 + 1 = 2x + 2x^2 \rightarrow y_1^3 = 2x + 2x^2 - 1$

$y_2^3 = 2x^2 + 2x - 1$

$\rightarrow y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2$ تابع است

ب) $x\cos y = y\cos x \xrightarrow[x=\pi]{\text{مثال نقض}} \pi\cos y = y\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \rightarrow \cos y = 0 \rightarrow y = k\pi + \frac{\pi}{2}$



غیرقابل ← تابع نیست

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \rightarrow x + y = 2\sqrt{xy}$

$x + y - 2\sqrt{xy} = 0 \rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$

تابع هست ✓

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$

$x(y^2+2) - y(y^2+2y) = 0$

$(y^2+2)(x-y) = 0 \rightarrow x = y$ تابع ✓

← لزوماً مساوی یا بزرگتر ۲ است

۲-

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a + 2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$

$|x-1| \geq 2 \rightarrow x - 1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3$

$x - 1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1$

$\xrightarrow[\text{در دو ضابطه مشترک}]{x=-1} 2(-1)^2 - b = a + 2(-1)$

$2 - b = a - 2$

تابع هست ✓

د) $xy^2+2x-y^3-2y=0$

$x(y^2+2)-y(y^2+2y)=0$

$(y^2+2)(x-y)=0 \longrightarrow x=y$ ✓ تابع

لزوماً مساوی ۰ بزرگتر ۲ است

۲-

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-b & |x-1|\geqslant 2 \\ a+2x & -3\leqslant x\leqslant -1 \end{cases}$$

$|x-1|\geqslant 2 \rightarrow x-1\geqslant 2 \rightarrow x\geqslant 3$

$x-1\leqslant -2 \rightarrow x\leqslant -1$

$\xrightarrow[\text{در دو ضابطه مشترک}]{x=-1}$ $2(-1)^2-b=a+2(-1)$

$2-b=a-2$

$4=a+b$

۳-

$f(x)=\sqrt{-x^2-bx+a} \xrightarrow[\text{فرجه زوج مثبت و صفر است (نامنفی)}]{\text{زیر رادیکال}} -x^2-bx+a\geqslant 0$

طبق تعیین علامت داریم:

	b		a	
$-$	0	$+$	0	$-$

$a=0$ نیست چون اگر ۰ باشد b نیز صفر است و در این صورت فقط ریشه داریم ← غیرقابل قبول

$x=b \Rightarrow -b^2-b^2+a=0$

$a=2b^2$

$x=a \Rightarrow -a^2-ba+a=0$

$a-ba=a^2 \xrightarrow[a\neq 0]{\text{با فرض اینکه}} \cancel{a}(1-b)=\cancel{a}(a)$

$1-b=2b^2$

$2b^2+b-1=0 \xrightarrow[\text{روسی}]{\text{روش}} b^2+b-2=0$

$(b+2)(b-1)=0$

$\text{امتحان} \rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول

تابع ✓ $x = y$ →

لم نزولی ساده! بزرگتر ۲ است

۲-

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a + 2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$|x-1| \geq 2 \rightarrow x - 1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3$

$x - 1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1$

$\xrightarrow[\text{در نقطه مرزی مشترک}]{x=-1} 2(-1)^2 - b = a + 2(-1)$

$2 - b = a - 2$

$4 = a + b$

۳-

$f(x) = \sqrt{-x^2 - bx + a} \xrightarrow[\text{فرض از مثبت و صفر (نامنفی) است}]{\text{زیر رادیکال}} -x^2 - bx + a \geq 0$

طبق تعیین علامت داریم:

$b \quad a$

$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

$a = 0$ نیست چون اگر ۰ باشد b نیز صفر است و در این صورت فقط ریشه داریم ← غیرقابل قبول

$x = b \Rightarrow -b^2 - b^2 + a = 0$

$a = 2b^2$

$x = a \Rightarrow -a^2 - ba + a = 0$

$a - ba = a^2 \xrightarrow[a \neq 0]{\text{با فرض اینکه}} \cancel{a}(1-b) = \cancel{a}(a)$

$1 - b = 2b^2$

$2b^2 + b - 1 = 0 \xrightarrow[\text{روسی}]{\text{روش}} b^2 + b - 2 = 0$

$(b+2)(b-1) = 0$

$b = -2 \qquad b = 1$

$\div 2 \downarrow \qquad \div 2 \downarrow$

$-1 \qquad \frac{1}{2}$

اکثان ← $b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ غیرقابل قبول چون b باید کوچکتر از a باشد

$b = -1 \rightarrow a = 2(-1)^2 = 2 \quad \rightarrow a + b = 2 - 1 = 1$

Scanned with CamScanner

۴ -

تابع رامی توان خطی

گرفت $a=0$

چون از $(2, +\infty)$ منفی است پس b نیز منفی بوده است $\Leftarrow$ $x=2$ ریشه

$$ax^2+bx+c>0$$

$$\begin{array}{c|c} + & + \\ & 2 \end{array}$$

$$\frac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال}}$$

اگر فرجه زوج مثبت باید باشد و چون مخرج است نباید صفر باشد)

$$2b+c=0$$
$$2b=-c \longrightarrow 3a+c-2\underbrace{|b|}_{-b} = 3a+c+\underbrace{2b}_{-c}+b = 3\cancel{a}+b = b$$

---

۵ -

الف) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-[x]}} \xrightarrow[\text{صفر باشد}]{\text{مخرج نباید}} |x|-[x]\neq 0$

$|x| \neq [x] \to x \notin Z^+$

$D_f = R - \{x \mid x\geq 0 , x\in Z\}$

ب) $f(x) = \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \to \sqrt{x} = 9-\sqrt{y}$ $\xrightarrow{\text{زیر رادیکال}}$ با زوج فرجه مثبت است $x\geq 0$ (1)

جواب رادیکال زوج مثبت است پس $\sqrt{y}=9-\sqrt{x} \to 9-\sqrt{x}\geq 0$

$9\geq \sqrt{x}$

$81 \geq x$ (2)

اشتراک $\cap$

$(1) \cap (2) \to x\in [0, 81]$

① بازه‌ای ... مثبت است

اشتراک $\cap$

جواب رادیکال زوج مثبت است و صفر $\longrightarrow$ ~~...~~ $\sqrt{y}=9-\sqrt{x} \to 9-\sqrt{x}\geq 0$

$9\geq \sqrt{x}$

$81\geq x$ ②

$① \cap ② \to x\in[0,81]$

۶- الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}} \xrightarrow[\text{با فرجه زوج نامنفی است}]{\text{زیر رادیکال}} \log_x^{3x-1}\geq 0$

$* \log_b^a \to a>0 \to 3x-1>0 \to 3x>1 \to x>\frac{1}{3}$

$b>0 \to x>0$

$b\neq 1 \to x\neq 1$

$\log_b^a > c$:
- $b>1 \to a>b^c \to 3x-1\geq 1 \to 3x\geq 2 \to x\geq\frac{2}{3} \to x\in(1,+\infty)$
- $0<b<1 \to a<b^c \to 3x-1\leq 1 \to 3x\leq 2 \to x\leq\frac{2}{3} \to x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$

$\to x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup(1,+\infty)$

ب) $f(x)=\log\dfrac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}=\log\dfrac{1}{-(\sqrt{|x|}-3)\underbrace{(\sqrt{|x|}+2)}_{\text{بزرگتر از ۲ همواره}}}$

$(|x|=t)$

$\sqrt{|x|}-3=0$

$|x|=9 \to x=9,-9$

$-9 \quad +9$: $- \quad + \quad -$

$D_f=(-9,+\infty)$

از ۲ $\xrightarrow[\text{باید بزرگتر از صفر شود}]{\text{می‌دانیم}}$ $6+\sqrt{|x|}-|x|>0 \to 6+\sqrt{t}-t>0$

ریشه‌ها

$6+\sqrt{t}-t=0$

$\sqrt{t}=t-6$

$t=t^2+36-12t$

$t^2-13t+36=0$

$(t-4)(t-9)=0$

$-9 \quad -4 \quad 4 \quad 9$

$\to D_f=(-9,+9)$

۷-

$$y=\sqrt{\frac{3x+2+a(x+b)}{x+b}}\xrightarrow[\text{فرجه زوج نامنفی است.}]{\text{زیر رادیکال با}} y=\sqrt{\frac{(3+a)x+2+ab}{x+b}}$$

$3+a=0$

$a=-3$

$$\begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline - & + \\ & \text{ت ن} \end{array}$$

$\overset{+2}{x}+b=0$

$b=-2$

ریشه‌ای بوده که مخرج را صفر کرده به همین دلیل غیرقابل قبول

۸-

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & [x]>4 \rightarrow x\in[5,+\infty) \quad (1)\\ 4x+3 & [x]\le 4 \rightarrow x\in(-\infty,5) \quad (2)\end{cases}$$

$$y=\sqrt{f(x)-x+1} \xRightarrow{x\in[5,+\infty)} y=\sqrt{2x-1-x+1} \rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow x\ge 0 \;(3) \xrightarrow{(1)\cap(3)} x\ge 5$$

$$\xrightarrow{x\in(-\infty,5)} y=\sqrt{4x+3-x+1}=\sqrt{3x+4} \Rightarrow 3x+4\ge 0,\; 3x\ge -4,\; \left(x\ge -\frac{4}{3}\right)\;(4) \xrightarrow{(2)\cap(4)} -\frac{4}{3}\le x<5$$

اجتماع $\rightarrow D_{f(x)}=\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$

۹-

$$y=\frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(4x^2+4x+1)^2}=\frac{3(2x+1)(2x+1)(2x+1)}{(2x+1)^2(2x+1)^2}$$

$\rightarrow 2x+1=0$

$+2$

$x + b = 0$

$b = -2$

تان ← ریشه‌ای بوده که مخرج را صفر کرده به همین دلیل غیرقابل قبول

$-\quad\vdots\quad+$

8-

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & [x] \geq 5 \rightarrow x \in [5, +\infty) \quad (1) \\ 4x+3 & [x] < 5 \rightarrow x \in (-\infty, 5) \quad (2) \end{cases}$$

$y = \sqrt{f(x) - x + 1}$ (3) $\xRightarrow{x \in [5,+\infty)} y = \sqrt{2x - 1 - x + 1} \rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \xrightarrow{(1) \cap (3)} x \geq 5$ → اجتماع

$\xrightarrow{x \in (-\infty, 5)} y = \sqrt{4x + 3 - x + 1} = \sqrt{3x + 4} \Rightarrow 3x + 4 \geq 0$, $3x \geq -4$, $\left(x \geq -\frac{4}{3}\right)$ (4) $\xrightarrow{(4) \cap (2)} -\frac{4}{3} \leq x < 5$

اجتماع $\rightarrow D_{f(x)} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

9-

$$y = \frac{3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(2x+1)(2x+1)(2x+1)}{(2x+1)^2(2x+1)^2}$$

$\rightarrow 2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$: $-\quad\vdots\quad+$ تان

$D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ساده کردن $\rightarrow \frac{3\cancel{(2x+1)}^3}{(2x+1)^{\cancel{4}}} = \frac{3}{2x+1}$

10-

$y = \sqrt{1 - \log(2x - a)} \rightarrow 2x - a > 0 \rightarrow 2x > a \quad \left(x > \frac{a}{2}\right)$ (2)

$\rightarrow 1 - \log(2x - a) \geq 0 \rightarrow 1 \geq \log_{10}(2x - a)$

زیر رادیکال زوج نامنفی است

$\log_a b \rightarrow b > 0$

$2x - a \leq 10$

$2x \leq 10 + a$

$x \in (-\infty, 5) \rightarrow y = \sqrt{2x+3-x+1} = \sqrt{3x+4} \Rightarrow 3x+4 \geq 0$

$3x \geq -4$

$x \geq -\frac{4}{3}$ (2)

$(1) \cap (2) \longrightarrow -\frac{4}{3} \leq x < 5$

اجتماع $\rightarrow D_{f(x)} = [-\frac{4}{3}, +\infty)$

---

۹ -

$$y = \frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(4x^2+4x+1)^2} = \frac{3(2x+1)(2x+1)(2x+1)}{(2x+1)^2(2x+1)^2}$$

$\rightarrow 2x+1=0$

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

-1

$- \quad +$

ثابت

$\rightarrow D = R - \{-\frac{1}{2}\}$

ساده کردن $\longrightarrow \frac{3\cancel{(2x+1)}^{3}}{\cancel{(2x+1)^{4}}} = \frac{3}{2x+1}$

---

۱۰ -

$y = \sqrt{1-\log(2x-a)} \rightarrow 2x-a > 0 \rightarrow 2x > a \quad (x > \frac{a}{2})$ (2)

زیر رادیکال نامنفی است $\longrightarrow 1 - \log(2x-a) \geq 0 \rightarrow 1 \geq \log_{10}(2x-a)$

$\log_a b \rightarrow b > 0$

$2x - a \leq 10$

$2x \leq 10 + a$

$x \leq \frac{10+a}{2}$ (1)

$\xrightarrow[\text{اشتراک ۱ و ۲}]{1 \cap 2} \frac{a}{2} < x \leq \frac{10+a}{2}$

$b < x \leq c$

$b = \frac{a}{2} \quad c = \frac{10+a}{2} = 5 + \frac{a}{2} \Rightarrow c - b = 5$