دبیر: سپهر امین‌نیا — تکلیف شماره ۱ — ۲۰ — دوازدهم جمع

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \rightarrow y^3 = 2x^2 + 2x - 1$ — تابع هست ✓

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, y_1) \in f\\(x_2, y_2) \in f\end{array}\right\} \xrightarrow{x_1 = x_2} y_1 = y_2 \rightarrow \begin{cases} y_1^3 = 2x^2 + 2x - 1 \\ y_2^3 = 2x^2 + 2x - 1 \end{cases} \rightarrow y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2$$

۰/۵ — ۱

ب) $x \cos y = y \cos x$ — تابع نیست ×

مثال نقض $\xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos y = \overbrace{y \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}}^{0} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos y = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ — ۰/۵ — ۲

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \qquad xy > 0$ — تابع هست ✓

$$x + y = 2\sqrt{xy} \rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 0 \longrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \rightarrow x = y$$

۰/۵

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1, y_1 \in f\\x_2, y_2 \in f\end{array}\right. \xrightarrow{x_1 = x_2} \boxed{y_1 = y_2}$$

$$xy^2 + 2x = y^3 + 2y \rightarrow x(y^2 + 2) = y^3 + 2y \rightarrow x = \frac{y^3 + 2y}{y^2 + 2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{y_1^3 + 2y_1}{y_1^2 + 2} \\ x = \frac{y_2^3 + 2y_2}{y_2^2 + 2} \end{cases}$$

۰/۵

$$\rightarrow \frac{y_1^3 + 2y_1}{y_1^2 + 2} = \frac{y_2^3 + 2y_2}{y_2^2 + 2} \rightarrow \frac{y_1 \cancel{(y_1^2 + 2)}}{\cancel{y_1^2 + 2}} = \frac{y_2 \cancel{(y_2^2 + 2)}}{\cancel{y_2^2 + 2}} = \boxed{y_1 = y_2}$$

تابع هست ✓

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & ; |x - 1| \geq 2 \\ a + 2x & ; -3 \leq x \leq -1 \end{cases} \qquad a + b = ?$$

۲

$$|x - 1| \geq 2 \begin{cases} x - 1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3 \\ x - 1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ ۱- در هر دو معادله صدق می‌کند بنابراین جایگذاری می‌کنیم و برابر قرار می‌دهیم $\longrightarrow$

$\xrightarrow{x = -1} 2 - b = a + 2(-1) \Rightarrow \boxed{a + b = 4}$ جواب

۲

پریا شهرانی نیا

$f(x)=\sqrt{a-bx-x^2} \rightarrow D_f=[b,a] \qquad a+b=? \qquad a\neq 0 , b\in Z$

سرها max یا b

$a \rightarrow -a^2-ba+a \rightarrow -a^2+a(1-b)=0 \rightarrow a(-a+1-b)=0 \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق (مسئله گفته)} \\ a=1-b & \text{ق ق} \end{cases}$

$b \rightarrow -b^2-b^2+\underset{1-b}{a}=-2b^2-b+1=0 \rightarrow 2b^2+b-1=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} b=-1 & \text{ق ق} \\ b=\frac{1}{2} \rightarrow b\notin Z & \text{غ ق ق} \end{cases}$ ۳

$\begin{matrix} a=1-b \rightarrow a=1-(-1)=2 \\ b=-1 \end{matrix} \rightarrow a+b=2+(-1)=1 \rightarrow$ جواب

2

$y=\dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \rightarrow D=(-\infty,2) \qquad 3a+c-3|b| \underset{\text{برحسب } b}{=} ?$

$\underset{+\quad \quad -}{\overset{2}{\rule{2em}{0.4pt}}}$ ← در نتیجه علامت طوری است ۴

با توجه به دامنه چون فقط یه ریشه را در برگرفته یعنی زیر رادیکال یه معادله درجه ۱ است در نتیجه ضریب x^2 یعنی a برابر با صفر است

$\rightarrow a=0$ 2

عدد ۲ را در معادله می‌گذاریم $\xrightarrow{x=2} bx+c=0 \rightarrow 2b+c=0 \rightarrow \boxed{c=-2b}$

$\left.\begin{matrix} 3a=0 \\ c=-2b \end{matrix}\right\} \rightarrow 3a+c-3\underset{-b}{|b|}=0-2b+3b=\boxed{b} \rightarrow$ جواب

الف) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-[x]}} \rightarrow |x|-[x]\neq 0 \rightarrow |x|\neq[x] \rightarrow$ x نباید عدد صحیح مثبت و صفر باشد

1

$D_f=R-\{Z^+,0\}$ ۵

2

ب) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \rightarrow \sqrt{y}=9-\sqrt{x} \xrightarrow[\text{باید مثبت باشد}]{\text{عبارت حاوی } \sqrt{y}} 9-\sqrt{x}\geq 0 \rightarrow \sqrt{x}\leq 9 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x\leq 81$ ①

1

$\rightarrow x\geq 0$ ②

$\xrightarrow{①\cap②} D_f=[0,81]$

الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}}$

$\rightarrow 3x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{3}$

$\rightarrow x>0$

$\rightarrow x\neq 1$

$\rightarrow \log_x^{3x-1}\geq 0 \begin{cases} \xrightarrow{x>1} 3x-1\geq x^0 \rightarrow 3x-1\geq 1 \rightarrow 3x\geq 2 \rightarrow x\geq\frac{2}{3} \\ \xrightarrow{0<x<1} 3x-1\leq x^0 \rightarrow 3x-1\leq 1 \rightarrow 3x\leq 2 \rightarrow x\leq\frac{2}{3} \end{cases}$ ۶

$D_f=(0,\frac{2}{3}]\cup(1,+\infty)$ 2

ب) $f(x)=\log\dfrac{1}{4+\sqrt{|x|}-|x|} \rightarrow \dfrac{1}{4+\sqrt{x}-|x|}>0 \rightarrow (-9,9)$

$4+\sqrt{x}-|x|\neq 0 \begin{cases} x\geq 0 \rightarrow 4+\sqrt{x}-x\neq 0 \rightarrow 4+\sqrt{x}\neq x \rightarrow x\neq 9 \\ x<0 \rightarrow 4+\sqrt{-x}+x\neq 0 \rightarrow 4+\sqrt{-x}\neq -x \rightarrow x\neq -9 \end{cases}$ $\qquad D_f=(-9,9)$

۷

$y=\sqrt{\frac{3x+2}{x+b}+a} \to D=(2,+\infty)$

صورت نباید ریشه داشته باشد → $a=-3$

$x+b\neq 0 \to x\neq -b$

(1) $\frac{3x+2+ax+ab}{x+b}=\frac{(3+a)x+ab+2}{x+b}\ge 0$

$-\frac{ab+2}{3+a}$		$-b$	
+	−	+	

→ از آنجایی که ۲ در دامنه نیست → $-b=2 \to b=-2$ → جواب

0/5

۲

۸

$y=\sqrt{f(x)-x+1}$ $\quad f(x)=\begin{cases}2x-1\ ; & [x]>4 \to x\ge 5\\ 4x+3\ ; & [x]\le 4\end{cases} \to f(x)\begin{cases}2x-1\ ; & x\ge 5\\ 4x+3\ ; & x<5\end{cases}$

$x\ge 5 \to \sqrt{2x-1-x+1}=\sqrt{x}\to x\ge 0 \xrightarrow{\cap\, x\ge 5} [5,+\infty)$ (1)

$x<5 \to \sqrt{4x+3-x+1}=\sqrt{3x+4}\to 3x+4\ge 0 \to x\ge -\frac{4}{3} \xrightarrow{\cap\, x<5} [-\frac{4}{3},5)$ (2)

$\boxed{(1)\cup(2) \to [-\frac{4}{3},+\infty)}$ → جواب

۲

۹

$y=\frac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2}$ → $3(8x^3+12x^2+6x+1)$ خودش اتحاد $(a+b)^3$ است
$3(2x+1)^3$

قبل از ساده کردن باید دامنه را بیابیم → $((2x+1)^2)^2=(2x+1)^4 \to 2x+1\neq 0 \to x=-\frac{1}{2}$

ساده کردن $\xrightarrow[x=-\frac12]{\text{امتحان}}$ یکی از ریشه‌ها $-\frac{1}{2}$ است →

$$\begin{array}{l|l} 24x^3+36x^2+18x+3 & x+\frac12 \\ \underline{-24x^3-12x^2} & 24x^2+24x+6 \\ 24x^2+18x+3 & \\ \underline{-24x^2-12x} & \\ 6x+3 & \\ \underline{-6x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$24x^2+24x+6 \to 6(4x^2+4x+1)$

$\to 6(2x+1)^2 \Rightarrow \frac{6\cancel{(2x+1)^2}(x+\frac12)}{(2x+1)^{\cancel{4}\,2}}=\frac{6(x+\frac12)}{(2x+1)^2}=\frac{3\cancel{(x+\frac12)}}{\cancel{(x+\frac12)}(2x+1)}=\frac{3}{2x+1}$ → $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-\frac12\}}$ جواب

۲

۱۰

$y=\sqrt{1-\log(2x-a)} \to D=(b,c]$ $\quad c-b=?$

$2x-a>0 \to x>\frac{a}{2}$ (1)

$1-\log(2x-a)\ge 0 \to \log_{10}(2x-a)\le 1 \to 2x-a\le 10 \to x\le \frac{10+a}{2}$ (2)

$D=(\frac{a}{2},\frac{10+a}{2}]$ $\begin{cases}\frac{a}{2}=b\\ \frac{10+a}{2}=c\end{cases} \to c-b=\frac{10+a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{10+a-a}{2}=\frac{10}{2}=5$ → جواب

۲