دوازدهم جمع — تکلیف شماره ۱ — دریا شهرامی‌نیا

۱

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \rightarrow y^3 = 2x^2 + 2x - 1$ — تابع هست ✓

$$\left.\begin{matrix}(x_1, y_1) \in f \\ (x_2, y_2) \in f\end{matrix}\right\} \xrightarrow{x_1 = x_2} y_1 = y_2 \rightarrow \begin{cases} y_1^3 = 2x^2 + 2x - 1 \\ y_2^3 = 2x^2 + 2x - 1 \end{cases} \rightarrow y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2$$

ب) $x\cos y = y\cos x$ — تابع نیست ✗

مثال نقض $\xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos y = y\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos y = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ $\quad xy > 0$ — تابع هست ✓

$$x + y = 2\sqrt{xy} \rightarrow x - 2\sqrt{xy} + y = 0 \longrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \rightarrow x = y$$

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$ $\quad \begin{cases} x_1, y_1 \in f \\ x_2, y_2 \in f \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2} \boxed{y_1 = y_2}$

$$xy^2 + 2x = y^3 + 2y \rightarrow x(y^2 + 2) = y^3 + 2y \rightarrow x = \frac{y^3 + 2y}{y^2 + 2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{y_1^3 + 2y_1}{y_1^2 + 2} \\ x = \frac{y_2^3 + 2y_2}{y_2^2 + 2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y_1^3 + 2y_1}{y_1^2 + 2} = \frac{y_2^3 + 2y_2}{y_2^2 + 2} \rightarrow \frac{y_1(y_1^2 + 2)}{y_1^2 + 2} = \frac{y_2(y_2^2 + 2)}{y_2^2 + 2} \Rightarrow \boxed{y_1 = y_2}$$

تابع هست ✓

۲

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & ; |x - 1| \geq 2 \\ a + 2x & ; -3 \leq x \leq -1 \end{cases} \qquad a + b = ?$$

$$|x - 1| \geq 2 \begin{cases} x - 1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3 \\ x - 1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{cases} \longrightarrow$$

۱- در هر دو معادله صدق می‌کند بنابراین جایگذاری می‌کنیم و برابر قرار می‌دهیم ⟶

$$\xrightarrow{x = -1} 2 - b = a + 2(-1) \Rightarrow \boxed{a + b = 4}$$

جواب

پریا شهدادنیا

$f(x)=\sqrt{a-bx-x^2} \to D_f=[b,a] \qquad a+b=? \qquad a\neq 0 , b\in Z$

سر max در a: $-a-ba+a \to -a^2+a(1-b)=0 \to a(-a+1-b)=0$ { $a=0$ غ ق ق مسئله ← ; $a=1-b$ ق ق }

b: $-b^2-b^2+a = -2b^2-b+1=0 \to 2b^2+b-1=0 \xrightarrow{a+c=b}$ { $b=-1$ ق ق ; $b=\frac{1}{2} \to b\notin Z$ غ ق ق }

($a = 1-b$)

$a=1-b \to a=1-(-1)=2$
$b=-1 \to a+b=2+(-1)=1 \to$ جواب

3

$y=\frac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \to D=(-\infty,2) \qquad 3a+c-3|b| = ?$ برحسب b

در نتیجه علامت b طبق است + 2 −

با توجه به دامنه چون فقط یه ریشه را در بر گرفته یعنی زیر رادیکال یک معادله درجه 1 است در نتیجه ضریب x^2 یعنی a برابر با صفر است

$\to a=0$

عدد 2 را در معادله می گذاریم $\xrightarrow{x=2} bx+c=0 \to 2b+c=0 \to c=-2b$

$3a=0, c=-2b \} \to 3a+c-3|b| = 0-2b+3b = b \to$ جواب ($|b| \to -b$)

4

الف) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{|x|-[x]}} \to |x|-[x]\neq 0 \to |x|\neq[x]$ ← x نباید عدد صحیح مثبت و صفر باشد

$D_f=R-\{Z^+,0\}$

5

ب) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \to \sqrt{y}=9-\sqrt{x} \xrightarrow{\text{عبارت های } \sqrt{y} \text{ باید مثبت باشد}} 9-\sqrt{x}\geq 0 \to \sqrt{x}\leq 9 \xrightarrow{\text{به توان 2}} x\leq 81$ (1)

$\to x\geq 0$ (2)

$(1)\cap(2) \to D_f=[0,81]$

الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}}$
- $3x-1>0 \to x>\frac{1}{3}$
- $x>0$
- $x\neq 1$
- $\log_x^{3x-1}\geq 0$: $\xrightarrow{x>1} 3x-1\geq x^0 \to 3x-1\geq 1 \to 3x\geq 2 \to x\geq\frac{2}{3}$; $x<1$: $3x-1\leq x^0 \to 3x-1\leq 1 \to 3x\leq 2 \to x\leq\frac{2}{3}$

6

$D_f=(0,\frac{2}{3}]\cup(1,+\infty)$

ب) $f(x)=\log\frac{1}{4+\sqrt{|x|}-|x|} \to \frac{1}{4+\sqrt{x}-|x|}>0 \to (-9,9)$

$D_f=(-9,9)$

$4+\sqrt{x}-|x|\neq 0$
- $x\geq 0 \to 4+\sqrt{x}-x\neq 0 \to 4+\sqrt{x}\neq x \to x\neq 9$
- $x<0 \to 4+\sqrt{-x}+x\neq 0 \to 4+\sqrt{-x}\neq -x \to x\neq -9$

$y=\sqrt{\frac{3x+2}{x+b}+a} \to D=(2,+\infty)$ 7

$x+b\neq 0 \to x\neq -b$

$\frac{3x+2+ax+ab}{x+b}=\frac{(3+a)x+ab+2}{x+b}\geq 0$

$-\frac{ab+2}{3+a}$, $-b$: $+\ \vert\ -\ \vert\ +$ (ج , ج)

از آنجایی که ۲ در دامنه نیست ← $-b=2 \to b=-2$ ← جواب

$y=\sqrt{f(x)-x+1}$

$f(x)=\begin{cases}2x-1 ; & [x]>4 \to x\geq 5\\ 4x+3 ; & [x]\leq 4\end{cases} \to f(x)\begin{cases}2x-1 ; & x\geq 5\\ 4x+3 ; & x<5\end{cases}$ 8

$x\geq 5 \to \sqrt{2x-1-x+1}=\sqrt{x}\to x\geq 0 \xrightarrow{\cap\, x\geq 5} [5,+\infty)$ (1)

$x<5 \to \sqrt{4x+3-x+1}=\sqrt{3x+4}\to 3x+4\geq 0 \to x\geq -\frac{4}{3} \xrightarrow{\cap\, x<5} [-\frac{4}{3},5)$ (2)

$(1)\cup(2) \to [-\frac{4}{3},+\infty)$ ← جواب

$y=\frac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2}$ 9

قبل از ساده کردن باید دامنه را بیابیم ← $((2x+1)^2)^2=(2x+1)^4 \to 2x+1\neq 0 \to x\neq -\frac{1}{2}$

ساده کردن $\xrightarrow[x=-\frac{1}{2}]{\text{امتحان}}$ یکی از ریشه‌ها $-\frac{1}{2}$ است →

$$\begin{array}{l|l} 24x^3+36x^2+18x+3 & x+\frac{1}{2}\\ \underline{-24x^3-12x^2} & 24x^2+24x+6\\ 24x^2+18x+3 & \\ \underline{-24x^2-12x} & \\ 6x+3 & \\ \underline{-6x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$24x^2+24x+6 \to 6(4x^2+4x+1) \to 6(2x+1)^2$

$\Rightarrow \frac{6(2x+1)^2(x+\frac{1}{2})}{(2x+1)^4}=\frac{6(x+\frac{1}{2})}{(2x+1)^2}=\frac{3(2x+1)}{(2x+1)(2x+1)}=\frac{3}{2x+1} \to D=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ ← جواب

$y=\sqrt{1-\log(2x-a)} \to D=(b,c] \qquad c-b=?$

$2x-a>0 \to x>\frac{a}{2}$ (1)

$1-\log(2x-a)\geq 0 \to \log_{10}(2x-a)\leq 1 \to 2x-a\leq 10 \to x\leq \frac{10+a}{2}$ (2) 10

$D=(\frac{a}{2},\frac{10+a}{2}] \begin{cases}\frac{a}{2}=b\\ \frac{10+a}{2}=c\end{cases} \to c-b=\frac{10+a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{10+a-a}{2}=\frac{10}{2}=5$ ← جواب