سارینا عابدینی

۱-

الف) $y^{۳}=۲x^{۲}+۲x-۱ \longrightarrow y=\sqrt[۳]{۲x^{۲}+۲x-۱}$ $\begin{cases} y_{۱}=\sqrt[۳]{۲x_{۱}^{۲}+۲x_{۱}-۱} \\ y_{۲}=\sqrt{۲x_{۲}^{۲}+۲x_{۲}-۱} \end{cases} \Longrightarrow y_{۱}=y_{۲}$

تابع هست ✓

ب) $x\cos y=y\cos x \xrightarrow{\text{مثال نقض}} x=\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ y=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\dots$ تابع نیست.

ج) $\frac{x+y}{۲}=\sqrt{xy} \xrightarrow{\times ۲} x+y=۲\sqrt{xy} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^{۲}+y^{۲}+۲xy=۴xy \to x^{۲}+y^{۲}-۲xy=۰$

$(x-y)^{۲}=۰ \longrightarrow x-y=۰ \quad \boxed{x=y}$ ✓ تابع

د) $xy^{۲}+۲x-y^{۳}-۲y=۰ \qquad xy^{۲}+۲x=y^{۳}+۲y$

تابع است.

۲-

$f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}-b & ;|x-۱|\geq ۲ \\ a+۲x & ;-۳\leq x\leq -۱ \end{cases}$ $\longrightarrow |x-۱|\geq ۲ \to x-۱\geq ۲\to x\geq ۳$

$\to x-۱\leq -۲ \to \boxed{x\leq -۱}$

$\xrightarrow{x=-۱}$ $f(x)=۲-b$

$f(x)=a-۲$

$۲-b=a-۲ \qquad \boxed{a+b=۴}$

۳-

$f(x)=\sqrt{a-bx-x^{۲}} \qquad -x^{۲}-bx+a\geq ۰ \qquad x^{۲}+bx-a\leq ۰ \longrightarrow$ ریشه ها a و b هستند

$f(x)=(x-a)(x-b) \to f(x)=x^{۲}-(a+b)+ab$

$x^{۲}+bx-a=x^{۲}-(a+b)x+ab \to \begin{cases} b=-a-b \longrightarrow b=۱ \\ ab=a \longrightarrow a=۲ \end{cases} \qquad \boxed{a+b=۱}$

۴-

$ax^{۲}+bx+c>۰ \longrightarrow$ ۲ + ○ - $\qquad a<۰$ و $\frac{-b}{a}=۴$ ~~b=~~ $\boxed{a=\frac{-b}{۴}}$ و $\frac{c}{a}=۴ \to c=۴a$

$\boxed{c=-b}$

$a<۰ \to \boxed{b>۰}$

$۳a+c-۳|b|=\frac{-۳b}{۴}-b-۳b=-۴b-\frac{۳b}{۴}=\frac{-۱۶b-۳b}{۴}=\boxed{\frac{-۱۹b}{۴}}$

۵-

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱}{|x|-[x]}} \qquad |x|-[x]\neq ۰ \qquad |x|\neq [x] \to$ ~~$D=\mathbb{R}-\mathbb{Z}^{+}\cup\{۰\}$~~

$D=\mathbb{R}-W$

ب) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=۹ \to \sqrt{y}=۹-\sqrt{x} \longrightarrow x\geq ۰$ (I) و $۹-\sqrt{x}\geq ۰ \xrightarrow{I\cap II} ۰\leq x\leq ۸۱$

$۹\geq \sqrt{x} \to \boxed{۸۱\geq x}$ (II)

۶-

الف) $f(x)=\sqrt{\log_{x} ۳x-۱} \to x>۰\ ,\ x\neq ۱$ و $۳x-۱\neq ۰ \to x\neq \frac{۱}{۳}$ (I)

$\to \log_{x}^{۳x-۱}\geq ۰ \longrightarrow x\geq ۳x-۱ \to ۱\geq ۲x \to \boxed{x\leq \frac{۱}{۲}}$ (II)

$\xrightarrow{I\cap II} \frac{۱}{۳}<x\leq \frac{۱}{۲}$

ب) $f(x)=\log\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|} \longrightarrow x\neq ۰$ و $۶+\sqrt{|x|}-|x|\neq ۰\ ,\ \sqrt{|x|}=t \qquad -t^{۲}+t+۶\neq ۰$

$-(t-۳)(t+۲)\neq ۰$

$t\neq ۳$ و $t\neq -۲$ $\boxed{\text{غ ق ق}}$

$\sqrt{|x|}=۳ \to x\neq \pm ۹$

$\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰ \to$ -۹ ۹ / - ○ + ○ - $\to x\in(-۹,۹)$ و $\xrightarrow[\text{با x≠۰}]{\text{اشتراک}} \boxed{(-۹,۹)-\{۰\}}$

۷ - [illegible]

$y = \sqrt{a + \frac{۳x+۲}{x+b}}$

$x+b=0 \rightarrow x=۲$

$\boxed{b=-۲}$

$\frac{۳x+۲+ax+ab}{x+b}$

$\xrightarrow{x=-۲} \boxed{-۴+۲-۲a-۲a} = 0 \rightarrow ۴a = -۴ \rightarrow \boxed{a=-1}$

۲

$- \; ○ \; +$

---

۸ -

$y = \sqrt{f(x) - x + 1} \rightarrow f(x) - x + 1 \geq 0$

$\rightarrow [x] > ۴ \Leftrightarrow x \geq ۵ \rightarrow ۲x - 1 - x + 1 = \boxed{x}$

$x \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq ۵}$ ✓

$\rightarrow [x] \leq ۴ \rightarrow x < ۵ \rightarrow ۴x + ۳ - x + 1 = \boxed{۳x+۴} \rightarrow ۳x + ۴ \geq 0$

$\boxed{x \geq \frac{-۴}{۳}}$

$\rightarrow \boxed{\frac{-۴}{۳} \leq x < ۵}$ ✓

$D = \left[-\frac{۴}{۳}, +\infty\right)$

---

۹ -

$y = \frac{۲۴x^۳ + ۳۶x^۲ + ۱۸x + ۳}{(۴x^۲ + ۴x + 1)^۲} = \frac{۳(۸x^۳ + ۱۲x^۲ + ۶x + 1)}{((۲x+1)^۲)^۲} = \frac{۳(۲x+1)^۳}{(۲x+1)^۴} = \frac{۳}{(۲x+1)} \rightarrow ۲x+1 \neq 0$

$x \neq \boxed{-\frac{1}{۲}}$

$D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{۲}\right\}$

---

۱۰ -

$y = \sqrt{1 - \log(۲x - a)} \quad 1 - \log(۲x-a) \geq 0 \quad 1 \geq \log(۲x-a) \rightarrow ۲x - a \leq ۱۰$

$\downarrow$

$x \leq \frac{a}{۲} + ۵$

$۲x - a > 0 \quad x > \frac{a}{۲} \longrightarrow D = \left(\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲} + ۵\right]$

$c - b = \frac{a}{۲} + ۵ - \frac{a}{۲} = \boxed{۵}$