Subject:
Year. Month. Date.

مریم توکلی — دوازدهم A — جمعه — تکلیف ۱۰

سوال ۱)

$$2y = 3x - 1 \rightarrow 3x = 2y + 1 \rightarrow x = \frac{2y+1}{3}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3} \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$ عرض $(0, \frac{1}{3})$

$$\frac{2x+1}{3} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

مساحت $S = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

سوال ۲)

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty)$ ext: $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$, $y_{min} = 2$

در این بازه چون از نقطه اکسترمم به بعد است پس یک به یک محسوب می‌شود

وارون کردن تابع $\rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow y - 2 = (x-1)^2$

$$\rightarrow \sqrt{y-2} = x - 1 \rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1$$

$$\rightarrow \boxed{y = \sqrt{x-2} + 1} \quad x \geq 2$$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$ ext: $-\frac{b}{2a} = 1$, $y_{min} = 2$

چون دامنه مشخص شده، از بعد از اکسترمم است پس تابع یک به یک است.

وارون کردن $\rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \rightarrow \sqrt{y-2} = x - 1$

$$\rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \rightarrow \boxed{y = \sqrt{x-2} + 1} \quad x \geq 6$$

سوال ۳)

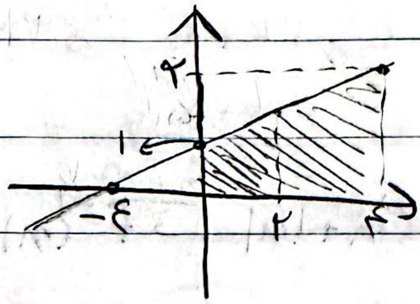
$$f(x) = 2x - \sqrt{\underbrace{16-4x(4-x)}_{4x^2-16x+16}} \rightarrow f(x) = 2x - |2x-4|$$

حالت وارون $\rightarrow y = 4x-4 \rightarrow y+4 = 4x \rightarrow x = \frac{y+4}{4}$

و یک به یک نیز $\rightarrow y = \frac{x+4}{4}$ در $x \in (-\infty, 4]$

در حالت دیگر $y=4$ است و یک به یک نیست!

$$S = \frac{(1+2)\times 4}{2} = \boxed{6}$$



سوال ۴)

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \rightarrow x^2-5 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 5 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{5}$$

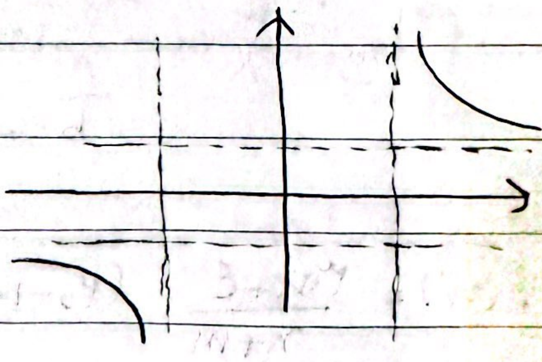
مجانب قائم

$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{x}{|x|} = 1$

$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{x}{|x|} = -1$

مجانب افقی

⇐ تابع یک به یک است!



وارون کردن $\rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \rightarrow y^2x^2 - 5y^2 = x^2$

$$x^2(y^2-1) = 5y^2 \rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \rightarrow y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$$

در حالت مثبت همواره x و y هم علامت می باشند

سوال ۵)

$$g(x)\begin{cases} x^2-4x+k & x\geq 2 \\ -x^2+6x+3k & x<2 \end{cases} \quad k=?$$

$$x^2-4x+k \longrightarrow x_S=2 \rightarrow y_S=k-4$$

$$-x^2+6x+3k \longrightarrow x_S=3 \longrightarrow y_S=8+3k$$

$$k-4\geq 3k+8 \longrightarrow 2k\leq -12 \longrightarrow k\leq -6$$

$$\rightarrow \boxed{k\in(-\infty,-6]}$$

سوال ۶)

$$f(x)=3x+|x| \qquad f^{-1}(x)=ax+b|x| \qquad ab=?$$

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 2x & 4x \end{array}$$

$$y=4x \rightarrow x=\frac{y}{4} \rightarrow y=\frac{x}{4} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4}$$

$$y=2x \rightarrow x=\frac{y}{2} \rightarrow y=\frac{x}{2} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8} \rightsquigarrow \text{حالت مثبت}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8} \rightsquigarrow \text{حالت منفی}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\underbrace{\frac{3}{8}}_{a}x-\underbrace{\frac{1}{8}}_{b}|x| \longrightarrow \boxed{ab=-\frac{3}{64}}$$

سوال ۷)

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \qquad (2,-10) \qquad fof^{-1}(x)+f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{(2,-10)} \frac{6+4}{2+m}=-10 \longrightarrow 2+m=-1 \longrightarrow \underline{m=-3} \rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3}$$

$$\longrightarrow a+d=0 \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3} \rightsquigarrow fof^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+\frac{3x+4}{x-3}$$

$$=\frac{x^2-3x+3x+4}{x-3}=\frac{x^2+4}{x-3}$$

* لطفاً صفحه بعد

آپادانا

$$\frac{x^2+4}{x-3}=x \rightarrow x^2+4=x^2-3x \rightarrow -3x=4 \rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

سوال ۸)

$$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right) \qquad 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=?$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3-x}{2}} f\left(3-2\left(\frac{3-x}{2}\right)\right)=2-g\left(\frac{3-x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=2-g\left(\frac{3-x}{4}\right)$$

$$f^{-1}(2)=t \rightarrow f(t)=-2 \rightarrow -2=2-g\left(\frac{3-t}{4}\right) \Rightarrow g\left(\frac{3-t}{4}\right)=4$$

$$\rightarrow g^{-1}(4)=\frac{3-t}{4}$$

$$4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=\left(4\times\frac{3-t}{4}\right)+t=\boxed{3}$$

سوال ۹)

$$y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[\text{مبدأ}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\frac{5x+13}{x+1} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{دو واحد به سمت}}$$

$$\frac{5(x-2)+13}{x-2+1}=\frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\text{۳ واحد به}} \frac{5x+3}{x-1}-3$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$$

$$y=\frac{2x+6}{x-1} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2} \qquad f(x)=f^{-1}(x)$$

$$\rightarrow \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \rightarrow 2x^2+2x-12=x^2+5x-6$$

$$\rightarrow x^2-3x-6=0$$

$$\rightarrow S=-\frac{b}{a}=\frac{3}{1}=\boxed{3}$$

Subject:

Year. Month. Date.

سوال ۱۰)

$f(x) = x + 4[x] \qquad (f-g)(x) = ?$

$$y = x + 4[x] \xrightarrow[\text{از دو طرف}]{\text{براکت گیری}} [y] = [x + 4[x]]$$

$$\Rightarrow [y] = 5[x] \longrightarrow [x] = \frac{[y]}{5}$$

$$y = x + 4[x] \longrightarrow y = x + \left(4 \times \frac{[y]}{5}\right) \longrightarrow x = y - \frac{4[y]}{5}$$

$$\rightarrow y = x - \frac{4[x]}{5} = f^{-1}(x) = g(x)$$

$$\rightarrow f(x) - g(x) = \cancel{x} + 4[x] - \cancel{x} + \frac{4[x]}{5} = \boxed{\frac{24[x]}{5}}$$