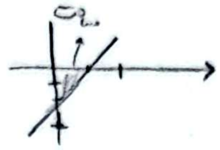
نام و نام خانوادگی: رها ارشدی   پاسخ تشریحی   تکلیف شماره ..

۱

$2y = 3x - 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 2y - 1 = 3x \longrightarrow \frac{2y-1}{3} = x \xrightarrow{\text{جای x و y}} \frac{2x-1}{3} = y$ ①

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = y \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \longrightarrow y = -\frac{1}{3} \end{cases}$



$\text{مساحت} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times |-\frac{1}{3}|}{2} = \frac{1}{12}$

۲

توابع درجه ۲ در صورتی دارای تابع وارون هستند که محدوده‌ای برای آن فرض شود تا برای هر x یک y داشته باشیم

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \;,\; x \in [1, +\infty) \longrightarrow \frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ ✓ یک به یک $\longrightarrow$

$y = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow +\sqrt{y-2} + 1 = x \xrightarrow{\text{جای x و y}} +\sqrt{x-2} + 1 = y$

$Rf = Df^{-1} \longrightarrow Df^{-1} = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \;,\; x \in (3, +\infty) \longrightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \longrightarrow$ یک به یک

$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = +\sqrt{x-2} + 1$

$Df^{-1} = Rf \longrightarrow Df = [6, +\infty)$

۳

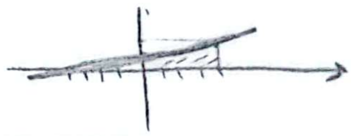
$y = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x - 4| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2x + 4 = 4 & x \geq 2 \\ 2x + 2x - 4 = 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$

$y = 4x - 4 \longrightarrow x = \frac{y+4}{4} \longrightarrow y = \frac{x+4}{4}$

$Df^{-1} = (-\infty, 4) \quad Df = (-\infty, 2]$

$\xrightarrow{\text{رابطه وارون}} y = \frac{x+4}{4} = \frac{x}{4} + 1 \xrightarrow{x \leq 4}$

$\frac{(1+2) \times 4}{2} = 6$



۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \xrightarrow{y_1 = y_2} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \longrightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5}$

$x_1^2 x_2^2 - 5x_2^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_1^2 \longrightarrow 5x_1^2 = 5x_2^2 \longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

پس $x_1 = x_2$ تابع یک به یک است

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \to y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \to y^2 x^2 - 5y^2 = x^2$ تابع یک به یک و وارون‌پذیر $\to y^2 x^2 - x^2 = 5y^2$

$\to x^2 = \frac{5y^2}{y^2 - 1} \to x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{جای x و y}} y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$

۵

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \longrightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{رو به بالا} \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \longrightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \text{رو به پایین} \end{cases}$

ضابطه اول $x = 2 \longrightarrow 4 - 8 + k = k - 4$

ضابطه دوم $x = 2 \longrightarrow -4 + 12 + 3k = 8 + 3k$

$\longrightarrow k - 4 \geq 8 + 3k$

$k - 4 \geq 8 + 3k \longrightarrow -12 \geq 2k \longrightarrow -6 \geq k$

$$y = 3x + |x| \quad \begin{cases} 4x & : x \geq 0 \xrightarrow{\text{وارون}} y = 4x \to x = \frac{y}{4} \quad x \geq 0 \\ 2x & : x \leq 0 \xrightarrow{\text{وارون}} y = 2x \to x = \frac{y}{2} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x \leq 0 \end{cases} \to ax + b|x| \quad \begin{cases} (a+b)x & x \geq 0 \\ (a-b)x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = \frac{1}{4} \\ a-b = \frac{1}{2} \end{cases} \to 2a = \frac{3}{4} \to a = \frac{3}{8} \quad b = -\frac{1}{8}$$ ۶

$$\Rightarrow a \times b = \frac{3}{8} \times -\frac{1}{8} = -\frac{3}{64}$$

$$y = \frac{3x+4}{x+m} \xrightarrow{(2,-10)} \frac{6+4}{2+m} = -10 \to 2+m = -1 \to m = -3$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+4}{x-3} \qquad a = -d \leftarrow \text{وارون تابع همان است}$$ ۷

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x-3} \to y = \overbrace{f \circ f^{-1}(x)}^{x} + f^{-1}(x) = x + \frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow y = \frac{x^2+4}{x-3} \xrightarrow{x=y}$$

$$\frac{x^2+4}{x-3} = x \to x^2 + 4 = x^2 - 3x$$

$$\to 4 = -3x \to x = -\frac{4}{3}$$

$$f(3-2x) = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right) \to 4g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = ?$$

$$-2 = 2 - 4 \quad \checkmark \qquad \begin{cases} f(3-2x) = -2 \\ g\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \end{cases}$$ ۸

$$\Rightarrow 4\left(\frac{x}{2}\right) + 3 - 2x = 2x + 3 - 2x = 3$$

تابع نسبت به مبدا قرینه ← جای x و y عوض و x و y قرینه

$$y = \frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[\text{مبدا}]{\text{قرینه}} -x = \frac{-5y-13}{1+y} \Rightarrow x = \frac{5y+13}{1+y} \to y = \frac{-x+13}{1-5x} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = \frac{-(x-2)+13}{1-5(x-2)} = \frac{-x+15}{-5x-9}$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y = \frac{x-15}{5x+9} - 3 = \frac{x-15-15x-27}{5x+9} = \boxed{\frac{-14x-42}{5x+9}}$$

$$f^{-1} = \frac{-9x-42}{5x+14} \to f^{-1} = f \to \frac{-9x+42}{5x+14} = \frac{-14x-42}{5x+9} \to -70x^2 - 306x + 588 = -45x^2 + 126x + 378$$ ۹

$$\to -25x^2 - 435x + 210 = 0 \to \frac{-b}{a} = \frac{435}{-25}$$

---

① $y = x + 4[x] \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} x = y + 4[y]$

② $[y] = [x + 4[x]] \to [y] = 5[x] \to [x] = \frac{[y]}{5} \xrightarrow{\text{جای x و y}} [y] = \frac{[x]}{5}$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} [y] = \frac{[x]}{5} \\ x = y + 4[y] \end{cases}\right\} \Rightarrow x - 4[y] = y \to \boxed{x - \frac{4[x]}{5} = y}$$ ۱۰

$$\Rightarrow g(x) = x - \frac{4}{5}[x] \quad , \quad f(x) = x + 4[x]$$

$$(f-g)(x) = x + 4[x] - x + \frac{4}{5}[x] = \frac{24}{5}[x]$$