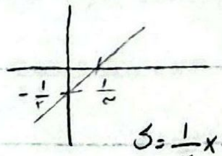
مینیارضای

(۱ $2y = 3x - 1 \longrightarrow 2x = 3y - 1 \longrightarrow y = \frac{2x+1}{3}$ $\xrightarrow{x=0} (0, \frac{1}{3})$; $\xrightarrow{y=0} (-\frac{1}{2}, 0)$



$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

(۲ الف) $y = x^2 - 2x + 1 + 2 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow \sqrt{y-2} = |x-1| \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y-2} = x - 1$

$\longrightarrow \sqrt{y-2} + 1 = x \xrightarrow{f^{-1}} y = \sqrt{x-2} + 1 \qquad D_{f^{-1}} = [2, \infty)$

ب) $x^2 - 2x + 2 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 1 \longrightarrow \sqrt{y-2} = |x-1| \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y-2} = x - 1$

$\longrightarrow \sqrt{y-2} + 1 = x \xrightarrow{f^{-1}} y = \sqrt{x-2} + 1 \qquad D_{f^{-1}} = [2, \infty)$ $\qquad x_s = \frac{-b}{2a} = 1$

هر ۲ (الف و ب) در دامنه خود یک به یک هستند

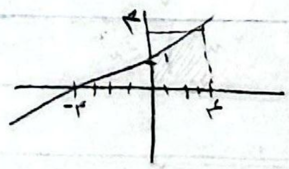
(۳ $f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \longrightarrow y = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x-4|$

$16 - 16x + 4x^2$

$2x + 2x - 4$	$2x - 2x + 4$
$4x - 4$	4
✓	✗

$4 \longrightarrow$ تابع ثابت به درد نمی‌خورد

$y = 4x - 4 \longrightarrow \frac{y+4}{4} = x \longrightarrow y = \frac{x+4}{4}$



$(-4, 0)$ و $(0, 1)$ و $(4, 2)$

$\frac{(1+2) \times 4}{2} = 6$

(۴

[illegible] $\begin{matrix} (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{matrix} \longrightarrow y_1 = y_2 \longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \longrightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5}$

$x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 5x_2^2 \longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2 \longrightarrow$ x,y هم علامت $\longrightarrow$ یک به یک هست

$y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \longrightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2 - 1} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{x,y هم علامت}} x = \frac{\sqrt{5}\, y}{\sqrt{y^2 - 1}} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{5}\, x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

۱۵) چون شیب این قسمت داره منفی می‌شه یعنی به ازای $x=2$

$x \geq 2 \to x^2-4x+k \xrightarrow{x=2} y = 4-8+k \longrightarrow$

$x<2 \to -x^2+6x+3k$ — باید کمتر این باشه

$-x^2+6x+3k \xrightarrow{x=2} 8+3k$

$8+3k < k-4 \to 2k < -12 \to k < -6$

$\frac{-b}{2a}$ (نقاط اکسترمم نباید توی دامنه باشند (مساوی اشکال نداره) رأس‌ها هم درسته بررسی شد تنها شرط $k<-6$

۱۶) $y = 3x + |x| \longrightarrow$

	0	
	$2x$	$4x$

$\longrightarrow f^{-1} \begin{cases} \frac{1}{4}x & x>0 \\ \frac{1}{2}x & x<0 \end{cases}$

میانگین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ $\longrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} = a$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \xrightarrow[\text{کوچیکتره}]{\text{چون } \frac{1}{4}} b = -\frac{1}{8}$

$g(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}|x| \longrightarrow \boxed{ab = \frac{-3}{64}}$

۷)

$y = f\circ f^{-1} + f^{-1}(x) = x + f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{برخورد با } y=x} x + f^{-1}(x) = x \to f^{-1}(x) = 0$

جایگذاری $(۲,-۱۰) \longrightarrow \frac{\cancel{۶+۴}^{\,۱۰}}{۲+m} = -۱۰ \to ۱ = -۲-m \to m = -۳ \longrightarrow f(x) = \frac{۳x+۴}{x-۳}$

$\xrightarrow{x=0} \frac{۴}{-۳} =$ جواب

۸)

$f(۳-۲x) = ۲ - g(\frac{x}{۲}) \qquad f(۳-۲x) = t \to f^{-1}(t) = ۳-۲x$

$۲ - g(\frac{x}{۲}) = t \to g(\frac{x}{۲}) = ۲-t \longrightarrow g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲} \to ۲x = ۴g^{-1}(۲-t)$

$f^{-1}(t) = ۳-۲x \longrightarrow f^{-1}(t) = ۳ - ۴g^{-1}(۲-t) \xrightarrow{t=-۲} f^{-1}(-۲) = ۳ - ۴g^{-1}(۴)$

$۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = ۴g^{-1}(۴) + ۳ - ۴g^{-1}(۴) = \underline{۳}$

۹)

$\xrightarrow[y \text{ و } x]{\text{قرینه نسبت به محور}} \frac{-۵x-۱۳}{۱+x} = -y \to \frac{۵x+۱۳}{۱+x} = y \xrightarrow{\text{۲ تا راست}} \frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+x-۲}$

$\xrightarrow{\text{۳ تا پایین}} \frac{۵x+۳}{x-۱} - ۳ = \frac{۲x+۶}{x-۱} \xrightarrow{f^{-1}(x)} y = \frac{x+۶}{x-۲}$

$\frac{۲x+۶}{x-۱} = \frac{x+۶}{x-۲} \to ۲x^۲+۲x-۱۲ = x^۲+۵x-۶ \to x^۲-۳x-۶=0 \quad S = \frac{-b}{a} = ۳$

۱۰) چون نسبت به خط $y=x$ قرینه اند یعنی $f^{-1}(x) = g(x)$ $\qquad f(x) = x + ۴[x]$

$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow x = y + ۴[y] \xrightarrow{\text{براکت می‌گیریم}} [x] = [y + ۴[y]] \to [x] = [y] + ۴[y]$

$[x] = ۵[y] \to \frac{[x]}{۵} = [y] \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x = y + \frac{۴[x]}{۵} \to y = x - \frac{۴[x]}{۵}$

$(f-g)(x) = x + ۴[x] - x + \frac{۴[x]}{۵} = \frac{۲۴}{۵}[x]$