دوازدهم دختر A — تکلیف شماره ۱۰ — [illegible] موسوی

۱)

$2y = 3x - 1 \longrightarrow 2x = 3y - 1 \longrightarrow 3y = 2x + 1 \longrightarrow y = \frac{2x+1}{3} \xrightarrow{y=0} x = -\frac{1}{2} \to (-\frac{1}{2}, 0)$

$\xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{3} \to (0, \frac{1}{3})$

$S = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$

---

۲)

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x_{min} = 1$

$x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$

$y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$D_f = R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$
$R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$
$\longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$
$D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x_{min} = 1 \quad x \in [3, +\infty)$

$y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$D_f = R_{f^{-1}} = [3, +\infty)$
$R_f = D_{f^{-1}} = [6, +\infty)$
$\longrightarrow f^{-1} = \sqrt{x-2} + 1$
$D_{f^{-1}} = [6, +\infty)$

---

۳)

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2}$

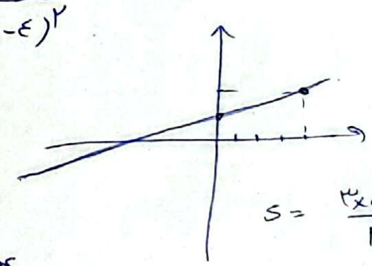
$f(x) = 2x - |2x - 4| \xrightarrow{x \geq 2} 2x - 2x + 4 = 4$ ✗ وارون‌پذیر

$\xrightarrow{x \leq 2} 2x + 2x - 4 = 4x - 4$ ✓ وارون‌پذیر

$y = 4x - 4 \longrightarrow x = \frac{y+4}{4} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$

$x \leq 2$
$4x \leq 8$
$4x - 4 \leq 4$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4] \quad , \quad R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2]$



$S = \frac{3 \times 4}{2} = \boxed{6}$

---

۴)

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

همواره + ← x و y هم‌علامت

$(x_1, y_1) \to y_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}}$

$(x_2, y_2) \to y_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}}$

$\xrightarrow{y_1 = y_2} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \longrightarrow \dfrac{x_1^2}{x_1^2-5} = \dfrac{x_2^2}{x_2^2-5} \longrightarrow$

$\cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_2^2 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

x و y هم‌علامت ← یک ۱ ، ۲ x مختلف العلامت ✗ ← $x_1 = x_2$

$y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 - 5} \longrightarrow x^2 = \dfrac{5y^2}{y^2 - 1} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5y^2}{y^2-1}} \xrightarrow{\text{x و y هم‌علامت}} x = \dfrac{\sqrt{5}\, y}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \dfrac{\sqrt{5}\, x}{\sqrt{x^2-1}}$

---

۵)

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + K & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3K & x < 2 \end{cases}$

$x \geq 2 \xrightarrow{x_{min}} 2$ ✓ جزو دامنه $\xrightarrow{x=2} 4 - 8 + K = K - 4$

$x < 2 \xrightarrow{x_{max}} 3$ ✗ جزو دامنه $\to 2$ ✓ $\xrightarrow{x=2} -4 + 12 + 3K = 3K + 8$

$3K + 8 \leq K - 4 \longrightarrow 2K \leq -12 \longrightarrow \boxed{K \leq -6}$

۶)

$f(x) = ۳x + |x| \xrightarrow[x \geq ۰]{y \geq ۰} y = ۴x \to x = \frac{y}{۴} \to y = \frac{x}{۴}$

$\xrightarrow[x<۰,\ y<۰]{} y = ۲x \to x = \frac{y}{۲} \to y = \frac{x}{۲}$

$\xrightarrow{\text{میانگین}} \frac{\frac{x}{۲}+\frac{x}{۴}}{۲} = \frac{۳x}{۸} \to a = \frac{۳}{۸}$

$x < ۰ \to \frac{۳}{۸}x - bx = \frac{x}{۲} \to b = -\frac{۱}{۸} \to \boxed{ab = -\frac{۳}{۶۴}}$

---

۷)

$f(x) = \frac{۳x+۴}{x+m} \to \frac{۶+۴}{۲+m} = -۱۰ \to ۲+m = -۱ \to m = -۳ \to f(x) = \frac{۳x+۴}{x-۳} \to f(x) = f^{-1}(x)$

$y = f\circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) \to x + \frac{۳x+۴}{x-۳} = y \to x + \frac{۳x+۴}{x-۳} = x \to ۳x+۴ = ۰ \to \boxed{x = -\frac{۴}{۳}}$

$x \neq ۳ \qquad x = y$

---

۸)

$f(۳-۲x) = t \to f^{-1}(t) = ۳-۲x$

$۲-g(\frac{x}{۲}) = t \to g(\frac{x}{۲}) = ۲-t \to g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲} \to ۲x = ۴g^{-1}(۲-t) \to$

$f^{-1}(t) = ۳-۲x \to f^{-1}(t) = ۳-۴g^{-1}(۲-t) \xrightarrow{t=-۲} f^{-1}(-۲) = ۳-۴g^{-1}(۴) \to$

$۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = ۴g^{-1}(۴) + ۳ - ۴g^{-1}(۴) = \boxed{۳}$

---

۹)

$y = \frac{۵x-۱۳}{۱-x} \to -y = \frac{-۵x-۱۳}{۱+x} \to y = \frac{۵x+۱۳}{x+۱} \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} \frac{۵(x-۲)+۱۳}{(x-۲)+۱} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}}$

$y = \frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱} \to f(x) = \frac{۲x+۶}{x-۱}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+۶}{x-۲}$

$\to \frac{۲(x+۳)}{x-۱} = \frac{x+۶}{x-۲} \to ۲(x^۲+x-۶) = x^۲+۵x-۶$

$x \neq ۱ \qquad x \neq ۲$

$۲x^۲+۲x-۱۲ = x^۲+۵x-۶ \to x^۲-۳x-۶ = ۰ \to S = \frac{-b}{a} = ۳$

$x \neq ۱,۲$

---

۱۰)

$y = x + ۴[x] \xrightarrow{\text{وارون}} x = y + ۴[y]$

$[x] = [y+۴[y]] \to [x] = [y] + ۴[y] \to$

$[x] = ۵[y] \to [y] = \frac{[x]}{۵} \Rightarrow ۴[y] = \frac{۴[x]}{۵}$

$x = y + \frac{۴}{۵}[x] \to y = x - \frac{۴}{۵}[x]$

$f(x) = x + ۴[x]$

$g(x) = x - \frac{۴}{۵}[x]$

$\to f(x) - g(x) = \frac{۲۴}{۵}[x]$