۱۹٫۵

«بسمه تعالی الحکیم»

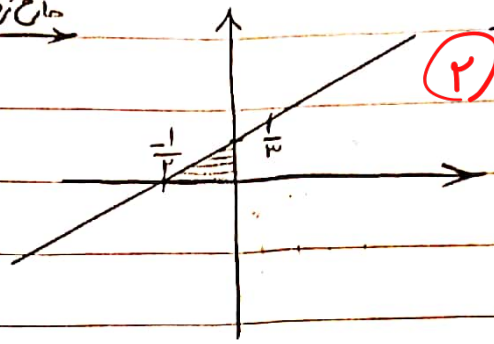
«دوازدهم دختر A. جمعه»

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2y_1 = 2y_2 \\ 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \end{matrix}$$ پس تابع یک به یک است

۱-

$2y = 3x - 1 \xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y]{\text{عوض کردن}} 2x = 3y - 1 \xrightarrow{\text{خارج کردن } y}$

$\frac{2x+1}{3} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$

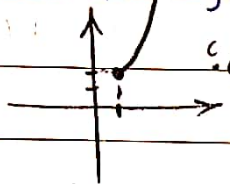


$S_\Delta = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$ ✓

۲

۲- الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad , \quad x \in [1, +\infty)$ $\quad R = [2, +\infty)$

$ext \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$



طبق شکل تابع یک به یک است پس معکوس پذیر است.

۱٫۷۵

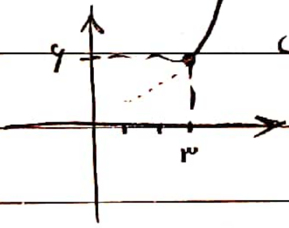
$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2$

$x = (y-1)^2 + 2 \Rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = y$ ✓

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$ $\quad D = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad , \quad x \in [3, +\infty)$

$ext \left| \begin{matrix} \frac{2}{2} = 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$



طبق شکل تابع یک به یک است پس معکوس پذیر است

$R_f = [6, +\infty)$

$D_f = [3, +\infty)$

$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2$ مثل الف

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$ ✓ چون باید $R_{f^{-1}} = D_f$ باشد پس باید برای f^{-1} دامنه تعیین کنیم

$D_{f^{-1}} = R_f = [6, +\infty)$ ✓

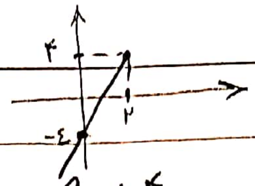
۳- $f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)}$ $\quad$ ۲

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x-4|$

$\Rightarrow f(x) = 4x - 4 \quad x < 2$

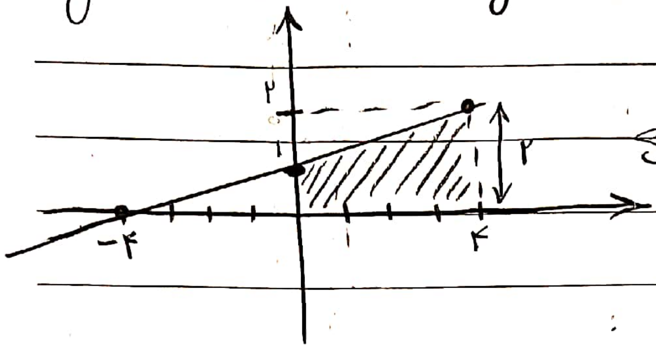
$2x + 2x - 4$ $4x - 4$ وارون پذیر است	۲ $2x - 2x + 4$ 4 وارون پذیر نیست

$f(x) = 4x - 4 \qquad x \in (-\infty, 2]$



$y = 4x - 4 \longrightarrow x = 4y - 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$



$S = \frac{(2+1)\times \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} = 6$ ✓

۴- چون زیر رادیکال عبارت همواره مثبت است پس x و y هم داره هم علامت هستند

$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

بررسی یک‌به‌یک بودن تابع:

$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ x_1 \overset{?}{=} x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \xrightarrow[\otimes]{\text{به توان } 2}$ ②

$\frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \Rightarrow \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - \cancel{5}x_2^2$

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \xrightarrow{\text{چون } x \text{ و } y \text{ هم علامت هستند}} x_1 = x_2$ ✓

پس تابع یک‌به‌یک است در نتیجه معکوس پذیر است! ✓

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \overset{\otimes}{\Rightarrow} x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5}$

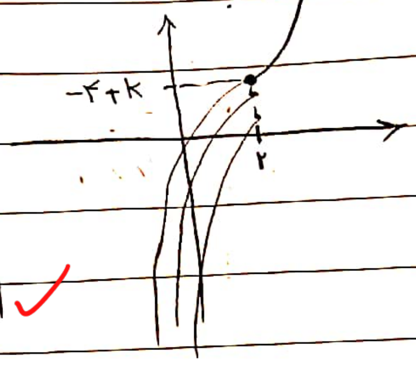
$y^2 = -\frac{-5x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$

چون x و y هم علامت هستند $\Rightarrow y = +\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ✓

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & : x\geq 2 \\ -x^2+6x+3k & : x<2 \end{cases}$$

$\text{ext}\Big|_{-4+k}^{2}$ ، $\text{ext}\Big|_{9+3k}^{3}$ ، $(2, 8+3k)$

۲) g(x) یک به یک است ، حدود k ؟



$8+3k \leq -4+k$

$2k \leq -12 \Rightarrow \boxed{k \leq -6}$

۶ـ $f(x)=3x+|x| \xrightarrow{\text{وارون تابع}} g(x)=ax+b|x| \Rightarrow ab=?$

۱,۷۵

$x\geq 0 \rightarrow f(x)=4x \rightarrow y=4x \rightarrow x=4y \rightarrow y=\frac{1}{4}x$

$x<0 \rightarrow f(x)=2x \rightarrow y=2x \rightarrow x=2y \rightarrow y=\frac{1}{2}x$

میانگین $\rightarrow \dfrac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x}{2}=\dfrac{\frac{x+2x}{4}}{2}=\dfrac{3x}{8}$ ، $\dfrac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|}{2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{1}{8}$

$f^{-1}(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}|x| \Rightarrow a=\frac{3}{8} \quad b=-\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{ab=-\frac{3}{64}}$

۷ـ ۲

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x+m} \xrightarrow{\text{عبور از } (2,-1)} \dfrac{10}{2+m}=-1 \Rightarrow -2-m=1$

$-3=m$

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3} \Rightarrow y=\dfrac{f\circ f^{-1}(x)}{x}+f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=f(x)$ چون $a+d=0$

$y=x+f(x) \Rightarrow y=x+\dfrac{3x+4}{x-3}$

← برخورد با نیمساز ناحیه اول:

دقت!

$\cancel{x}+\dfrac{3x+4}{x-3}=\cancel{x} \Rightarrow \dfrac{3x+4}{x-3}=0$

$\Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-4/3}$

$$f(۳-۲x) = ۲ - g\left(\frac{x}{۲}\right) \longrightarrow f^{-1}(-۲) + ۴g^{-1}(۴)$$ ـ۸

۲

$$f(۳-۲x) = t = ۲ - g\left(\frac{x}{۲}\right)$$

$$f^{-1}(t) = ۳ - ۲x \qquad g\left(\frac{x}{۲}\right) = ۲ - t$$

$$۲x = ۳ - f^{-1}(t) \qquad g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۲g^{-1}(۲-t)$$

$$x = \frac{۳ - f^{-1}(t)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳ - f^{-1}(t)}{۲} = ۲g^{-1}(۲-t)$$

$$۳ - f^{-1}(t) = ۴g^{-1}(۲-t)$$

$$۴g^{-1}(۲-t) + f^{-1}(t) = ۳ \Rightarrow \boxed{f^{-1}(-۲) + ۴g^{-1}(۴) = ۳}$$

$$y = \frac{۵x - ۱۳}{۱ - x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -y = \frac{-۵x - ۱۳}{x + ۱}$$ ۲ ـ۹

$$y = \frac{۵x + ۱۳}{x + ۱} \Rightarrow y = \frac{\overset{۵x-۱۰}{۵(x-۲)} + ۱۳}{(x-۲) + ۱} \Rightarrow y = \frac{۵x + ۳}{x - ۱}$$

$$y = \frac{۵x + ۳}{x - ۱} - ۳ \Rightarrow y = \frac{۵x + ۳ - ۳x + ۳}{x - ۱} = \frac{۲x + ۶}{x - ۱} = f(x)$$

$$y = \frac{۲x + ۶}{x - ۱} \Rightarrow x = \frac{۲y + ۶}{y - ۱} \Rightarrow y = -\frac{-x - ۶}{x - ۲} \Rightarrow y = \frac{x + ۶}{x - ۲} = f^{-1}(x)$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{۲x + ۶}{x - ۱} = \frac{x + ۶}{x - ۲} \Rightarrow \begin{matrix} x^۲ - ۳x - ۶ = ۰ \\ x^۲ - Sx + P = ۰ \end{matrix} \Rightarrow \boxed{S = ۳}$$

$$f(x) = x + ۴[x] \Rightarrow y = x + ۴[x] \Rightarrow [y] = [x + ۴[x]]$$ ـ۱۰

$$[y] = ۵[x] \Rightarrow [x] = \frac{[y]}{۵} \Rightarrow y = x + \frac{۴[y]}{۵}$$ ۲

$$x = y + \frac{۴[x]}{۵} \Rightarrow y = x - \frac{۴}{۵}[x] = g(x)$$

$$f(x) - g(x) = \cancel{x} + ۴[x] - \cancel{x} + \frac{۴}{۵}[x] = \boxed{\frac{۲۴[x]}{۵}}$$