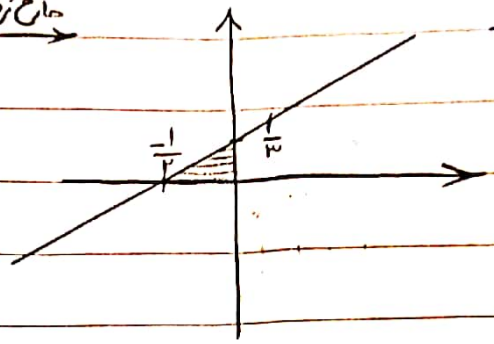
$$\begin{cases} y_1=y_2 \\ x_1=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2y_1=2y_2 \\ 3x_1-1=3x_2-1 \checkmark \end{matrix}$$ پس تابع یک به یک است

«دوازدهم دختر A. جمعه» «مبینا عالمی الحیدری»

-۱

$2y=3x-1 \xrightarrow[\text{جای x و y}]{\text{عوض کردن}} 2x=3y-1 \xrightarrow{\text{خارج کردن y}}$



$\frac{2x+1}{3}=y \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$

$S_{\Delta}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$

-۲

الف) $y=x^2-2x+3 \quad , \quad x\in[1,+\infty)$

$ext\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

طبق شکل تابع یک به یک است پس معکوس پذیر است؛

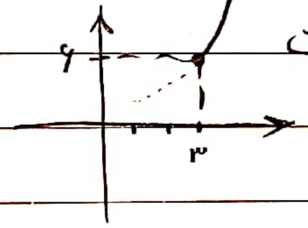
$y=x^2-2x+1+2 \Rightarrow y=(x-1)^2+2$

$x=(y-1)^2+2 \Rightarrow x-2=(y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x-2}+1=y$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1$

ب) $y=x^2-2x+3 \quad , \quad x\in[3,+\infty)$

$ext\left|\begin{matrix}\frac{2}{2}=1\\2\end{matrix}\right.$



طبق شکل تابع یک به یک است پس معکوس پذیر است

$R_f=[6,+\infty)$

$D_f=[3,+\infty)$

$y=x^2-2x+1+2 \Rightarrow y=(x-1)^2+2$ مثل الف

$f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1$ چون باید $R_{f^{-1}}=D_f$ باشد پس باید برای f^{-1} دامنه تعیین کنیم: $D_{f^{-1}}=R_f=[6,+\infty)$

-۳

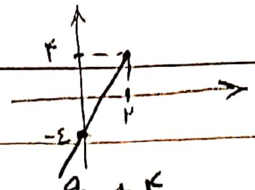
$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)}$

$f(x)=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}=2x-\sqrt{(2x-4)^2}=2x-|2x-4|$

	2	
$2x+2x-4$ $4x-4$		$2x-2x+4$ 4
وارون پذیر است		وارون پذیر نیست

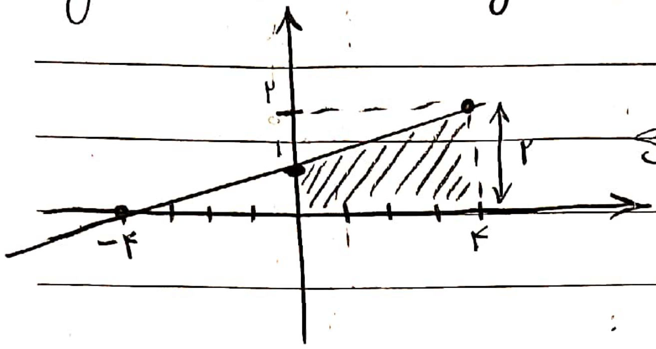
$\Rightarrow f(x)=4x-4 \quad x<2$

$f(x) = 4x - 4 \qquad x \in (-\infty, 2]$



$y = 4x - 4 \longrightarrow x = 4y - 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$



$S = \frac{(2+1) \times \cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} = 6$

۴- چون مخرج عبارت همواره مثبت است پس x و y همواره هم علامت هستند

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ $f(x)$

بررسی یک به یک بودن تابع:

$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ x_1 \overset{?}{=} x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ $\otimes$

$\frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \Rightarrow \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_2^2$

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \xrightarrow{\text{چون } x_1 \text{ و } x_2 \text{ هم علامت هستند}} x_1 = x_2$ ✓

پس تابع یک به یک است و در نتیجه معکوس پذیر است!

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \overset{\otimes}{\Rightarrow} x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5}$

$y^2 = -\frac{-5x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$

چون x و y هم علامت هستند $\Rightarrow y = +\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5}\, x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Scanned with CamScanner

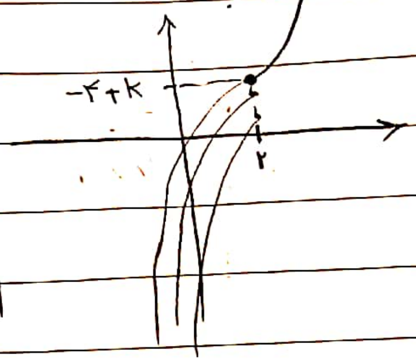
۵-

$$g(x)=\begin{cases} \overset{\searrow\nearrow}{x^2-4x+k} & : x\geq 2 \quad \nearrow \text{ext}\Big|^{2}_{-4+k} \\ \overset{\nearrow\searrow}{-x^2+6x+3k} & : x<2 \end{cases}$$

$\downarrow \text{ext}\Big|^{3}_{9+3k} \qquad (2, 8+3k)$

g(x) یک به یک است :

حدود k ؟



$$8+3k \leq -4+k$$

$$2k \leq -12 \Rightarrow \boxed{k \leq -6}$$

۶- $f(x)=3x+|x| \xrightarrow{\text{وارون تابع}} g(x)=ax+b|x| \Rightarrow ab=?$

$x\geq 0 \to f(x)=4x \to y=4x \to x=4y \to y=\frac{1}{4}x$

$x<0 \to f(x)=2x \to y=2x \to x=2y \to y=\frac{1}{2}x$

میانگین $\to \dfrac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x}{2} = \dfrac{\frac{x+2x}{4}}{2} = \dfrac{3x}{8} \qquad \dfrac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|}{2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{1}{8}$

$f^{-1}(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}|x| \Rightarrow a=\frac{3}{8} \quad b=\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{ab=\frac{3}{64}}$

۷- $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+m} \xrightarrow{\text{عبور از } (2,-10)} \dfrac{1\cancel{0}}{2+m} = -1\cancel{0} \Rightarrow -2-m=1$

$(-3=m)$

$f(x) = \dfrac{3x+4}{x-3} \Rightarrow y = \underbrace{f\circ f^{-1}(x)}_{x} + f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=f(x)$

چون $a+d=0$

$y = x + f(x) \Rightarrow y = x + \dfrac{3x+4}{x-3}$

برخورد با نیمساز ربع اول: ←

$\cancel{x} + \dfrac{3x-4}{x-3} = \cancel{x} \Rightarrow \dfrac{3x-4}{x-3} = 0$

$\Rightarrow 3x=4 \Rightarrow \boxed{x=4/3}$

$$f(۳-۲x)=۲-g(\tfrac{x}{۲}) \longrightarrow f^{-1}(-۲)+۴g^{-1}(۴)$$ −۸

$$f(۳-۲x)=t=۲-g(\tfrac{x}{۲})$$

$$f^{-1}(t)=۳-۲x \qquad g(\tfrac{x}{۲})=۲-t$$

$$۲x=۳-f^{-1}(t) \qquad g^{-1}(۲-t)=\frac{x}{۲} \Rightarrow x=۲g^{-1}(۲-t)$$

$$x=\frac{۳-f^{-1}(t)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳-f^{-1}(t)}{۲}=۲g^{-1}(۲-t)$$

$$۳-f^{-1}(t)=۴g^{-1}(۲-t)$$

$$۴g^{-1}(۲-t)+f^{-1}(t)=۳ \Rightarrow \boxed{f^{-1}(-۲)+۴g^{-1}(۴)=۳}$$

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -y=\frac{-۵x-۱۳}{x+۱}$$ −۹

$$y=\frac{۵x+۱۳}{x+۱} \Rightarrow y=\frac{\overbrace{۵(x-۲)}^{۵x-۱۰}+۱۳}{(x-۲)+۱} \Rightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱}$$

$$y=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \Rightarrow y=\frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱}=\frac{۲x+۶}{x-۱}=f(x)$$

$$y=\frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow x=\frac{۲y+۶}{y-۱} \Rightarrow y=-\frac{-x-۶}{x-۲} \Rightarrow y=\frac{x+۶}{x-۲}=f^{-1}(x)$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲} \Rightarrow \frac{x^۲-۳x-۶=۰}{x^۲-Sx+P=۰} \Rightarrow \boxed{S=۳}$$

$$f(x)=x+۴[x] \Rightarrow y=x+۴[x] \Rightarrow [y]=[x+۴[x]]$$ −۱۰

$$[y]=۵[x] \Rightarrow [x]=\frac{[y]}{۵} \Rightarrow y=x+\frac{۴[y]}{۵}$$

$$x=y+\frac{۴[x]}{۵} \Rightarrow y=x-\frac{۴}{۵}[x]=g(x)$$

$$f(x)-g(x)=\cancel{x}+۴[x]-\cancel{x}+\frac{۴}{۵}[x]=\boxed{\frac{۲۴}{۵}[x]}$$